

Matemáticas II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Extraordinaria 2025

Solucionario
2º de Bachillerato

Pregunta 1 – Probabilidad	2
Pregunta 2 – Álgebra	3
Pregunta 3 – Geometría	5
Pregunta 4 – Análisis	7

Pregunta 1 – Probabilidad (2,5 puntos)

Un vídeo de TikTok tiene una probabilidad de 0,6 de recibir un “like” de cada persona que lo ve.

1.1 (0,75 pt) De 4 personas que ven el vídeo, probabilidad de que ninguna dé “like”: $X \sim B(4; 0,6)$.

$$P(X = 0) = (0,4)^4 = \frac{16}{625}.$$

$$P(X = 0) = \frac{16}{625} = 0,0256$$

1.2 (0,75 pt) Probabilidad de que como máximo 2 de las 4 personas den “like”:

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \binom{4}{0}(0,4)^4 + \binom{4}{1}(0,6)(0,4)^3 + \binom{4}{2}(0,6)^2(0,4)^2.$$

$$= 0,0256 + 0,1536 + 0,3456 = 0,5248 = \frac{328}{625}.$$

$$P(X \leq 2) = \frac{328}{625} = 0,5248$$

1.3 (1 pt) Número mínimo de personas n para que la probabilidad de que *al menos una* dé “like” supere 0,999.

Se necesita $P(X \geq 1) = 1 - (0,4)^n > 0,999$, es decir $(0,4)^n < 0,001$. Probando valores:

$$(0,4)^7 \approx 0,0016384 > 0,001, \quad (0,4)^8 \approx 0,00065536 < 0,001.$$

$$n = 8 \text{ personas}$$

Pregunta 2 – Álgebra (2,5 puntos)

Opción 2.1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observación clave (se usa en todo el ejercicio): $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ (se comprueba multiplicando $B \cdot B$).

2.1.1 (0,75 pt) Resuelve $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

Como $B^2 = I$, el lado derecho es $A \cdot A^{-1} = I$. Por tanto $(A^{-1}X)^{-1} = I$, luego $A^{-1}X = I$, y despejando:

$$X = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2.1.2 (0,75 pt) Calcula $\det((3A \cdot 5B)^2)$.

Usando propiedades de determinantes: $\det(3A) = 3^2 \det(A)$, $\det(5B) = 5^2 \det(B)$. Aquí $\det(A) = (-2)(-2) - (1)(3) = 1$ y $\det(B) = (1)(-1) - 0 = -1$.

$$\det(3A \cdot 5B) = 9 \det(A) \cdot 25 \det(B) = 9(1) \cdot 25(-1) = -225.$$

$$\det((3A \cdot 5B)^2) = (-225)^2 = 50625.$$

$$\det((3A \cdot 5B)^2) = 50625$$

2.1.3 (1 pt) Encuentra $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

Como $B^2 = I$, las potencias pares de B son I y las impares son B : $B^{100} = (B^2)^{50} = I$, $B^{99} = B^{98} \cdot B = (B^2)^{49} B = B$.

$$\text{Calculamos } A + C = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ 3-3 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

La ecuación queda $aI + bB = I$. Como I y B son linealmente independientes (no son proporcionales), esto obliga a:

$$a = 1, \quad b = 0$$

Opción 2.2

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

2.2.1 (1,25 pt) Discusión según los valores de a .

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)^2.$$

Se anula (con multiplicidad doble) en $a = -1$:

- Si $a \neq -1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado**.
- Si $a = -1$: $|A| = 0$. Se comprueba que $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 2 \Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado** (un grado de libertad).

2.2.2 (1,25 pt) Resolución en cada caso.

Caso $a \neq -1$ (SCD): resolviendo por Cramer/Gauss se obtiene la solución general

$$x = y = \frac{a}{a+1}, \quad z = \frac{2a}{a+1}$$

(válida para todo $a \neq -1$; comprobado sustituyendo en las tres ecuaciones con `sympy`).

Caso $a = -1$ (SCI): el sistema queda $x + y - z = 1$, $-x - y + z = -1$, $-x + y = -1$ (las dos primeras son la misma ecuación cambiada de signo). Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$(x, y, z) = (\lambda, \lambda - 1, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pregunta 3 – Geometría (2,5 puntos)

Opción 3.1

Planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$ y $\pi_2 : x + z = 6$, con $m \in \mathbb{R}$.

3.1.1 (0,75 pt) Valor de m para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

Vectores normales: $\vec{n}_1 = (1, 2, m)$, $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$. La perpendicularidad de los planos equivale a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$:

$$1 + 0 + m = 0 \implies \boxed{m = -1}$$

3.1.2 (0,75 pt) Valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45° .

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1 + m|}{\sqrt{5 + m^2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Elevando al cuadrado: $2(1 + m)^2 = 2(5 + m^2) \Rightarrow (1 + m)^2 = 5 + m^2 \Rightarrow 1 + 2m + m^2 = 5 + m^2 \Rightarrow 2m = 4$.

$$\boxed{m = 2}$$

3.1.3 (1 pt) Recta intersección de π_1 y π_2 para el valor de m del apartado 3.1.1 ($m = -1$).

Con $m = -1$: $\pi_1 : x + 2y - z = -1$, $\pi_2 : x + z = 6$. Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones (tomando $y = \lambda$ como parámetro):

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - \lambda, \lambda, \frac{7}{2} + \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(comprobado: sustituyendo en ambas ecuaciones de los planos se satisfacen idénticamente).

Opción 3.2

Plano π : $3x + y - z = 2$; puntos $P = (0, 1, -1)$, $Q = (1, a, 1)$.

3.2.1 (1 pt) Valores de a para los que la recta PQ está contenida en π .

Primero, $P \in \pi$: $3(0) + 1 - (-1) = 2 \checkmark$ (para cualquier a). Para que toda la recta PQ esté contenida en π , basta con que Q también pertenezca a π :

$$3(1) + a - 1 = 2 \implies a = 0.$$

$$\boxed{a = 0}$$

3.2.2 (1,5 pt) Punto simétrico de Q respecto de π cuando $a = 1$, es decir $Q = (1, 1, 1)$.

Recta perpendicular a π por Q : $(x, y, z) = (1 + 3t, 1 + t, 1 - t)$. Sustituyendo en π :

$$3(1 + 3t) + (1 + t) - (1 - t) = 2 \implies 3 + 9t + 1 + t - 1 + t = 2 \implies 11t = -1 \implies t = -\frac{1}{11}.$$

Pie de la perpendicular: $F = \left(1 - \frac{3}{11}, 1 - \frac{1}{11}, 1 + \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)$.

El simétrico es $Q' = 2F - Q$:

$$\boxed{Q' = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)}$$

Pregunta 4 – Análisis (2,5 puntos)

Opción 4.1 – $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

4.1.1 (0,5 pt) Dominio y asíntotas.

El denominador $x^2 + 1$ nunca se anula, luego

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, hay una **asíntota horizontal** $y = 0$ en ambas direcciones. No hay asíntotas verticales (no hay raíces del denominador) ni oblicuas (al haber horizontal).

4.1.2 (1 pt) Monotonía.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

El signo de f' coincide con el de $1 - x^2$: positivo en $(-1, 1)$, negativo fuera.

$$f \text{ decrece en } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad f \text{ crece en } (-1, 1)$$

4.1.3 (1 pt) Extremos relativos.

Los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 1$. Con $f''(x)$ (o el criterio de la primera derivada, ya que f' cambia de signo $- \rightarrow +$ en $x = -1$ y de $+ \rightarrow -$ en $x = 1$):

$$\text{Mínimo relativo en } \left(-1, -\frac{1}{2}\right), \quad \text{Máximo relativo en } \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Opción 4.2 – $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 8x$

4.2.1 (1 pt) Punto de corte de f y g (con abscisa positiva) y área entre ambas curvas y la recta $x = 1$.

Igualando: $\frac{1}{x^2} = 8x \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Punto de corte: $(\frac{1}{2}, 4)$ (pues $g(1/2) = 4$ y $f(1/2) = 4$).

Para $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ se cumple $g(x) > f(x)$ (comprobado: $f(1) = 1 < g(1) = 8$), así que la región entre las curvas y la recta $x = 1$ queda entre $x = \frac{1}{2}$ (intersección) y $x = 1$:

$$\text{Área} = \int_{1/2}^1 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_{1/2}^1 \left(8x - \frac{1}{x^2} \right) \, dx = \left[4x^2 + \frac{1}{x} \right]_{1/2}^1.$$

$$= (4 + 1) - (1 + 2) = 5 - 3 = 2.$$

$\text{Área} = 2 \text{ u}^2$