

Matemáticas II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Ordinaria 2025

Solucionario
2º de Bachillerato

Pregunta 1 – Probabilidad y Estadística	2
Pregunta 2 – Álgebra	3
Pregunta 3 – Geometría	5
Pregunta 4 – Análisis	7

Pregunta 1 – Probabilidad y Estadística (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita (40%), vegetariana (25%) y pepperoni (el resto).

1.1 (0,25 pt) Probabilidad de que un cliente al azar haya pedido pepperoni:

$$P(\text{pepperoni}) = 1 - 0,40 - 0,25 = 0,35$$

1.2 (0,75 pt) Probabilidad de que dos clientes al azar hayan pedido tipos distintos. Calculamos primero la probabilidad de que pidan el **mismo** tipo:

$$P(\text{mismo}) = 0,40^2 + 0,25^2 + 0,35^2 = 0,16 + 0,0625 + 0,1225 = 0,345.$$

$$P(\text{distinto}) = 1 - 0,345 = 0,655$$

1.3 (0,75 pt) De 10 clientes, probabilidad de que exactamente 4 pidan margarita: $X \sim B(10; 0,4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} (0,4)^4 (0,6)^6 = 210 \times 0,0256 \times 0,046656 \approx 0,2508.$$

$$P(X = 4) \approx 0,2508$$

1.4 (0,75 pt) Probabilidad de que al menos uno de los 10 pida margarita:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,6)^{10} \approx 1 - 0,00605 = 0,99395.$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,9939$$

Pregunta 2 – Álgebra (2,5 puntos)

Opción 2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

2.1.1 (1,25 pt) Valores de α para los que $A^2 = A$ (idempotente).

Calculamos A^2 multiplicando A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}.$$

Igualando $A^2 = A$ entrada a entrada, la condición más restrictiva viene de la posición (1,2):

$$\alpha + \alpha^2 = \alpha \implies \alpha^2 = 0 \implies \alpha = 0.$$

Comprobamos que $\alpha = 0$ también satisface el resto de entradas ($0^2 = 0$ y $(1 - 0)^2 = 1 - 0$). La otra raíz que aparece en las entradas (2,2) y (3,3) por separado, $\alpha = 1$, no cumple la condición de la entrada (1,2), así que se descarta.

$$\boxed{\alpha = 0}$$

2.1.2 (1,25 pt) Valores de α para los que existe A^{-1} , y cálculo de la inversa.

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \alpha(1 - \alpha) \quad (\text{desarrollando por la tercera columna}).$$

Existe inversa cuando $|A| \neq 0$, es decir:

$$\boxed{\alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \neq 1}$$

Para esos valores, calculando por adjuntos (o por Gauss-Jordan) se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \alpha} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$ para todo $\alpha \neq 0, 1$ (verificado con `sympy`).

Opción 2.2

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.2.1 (1 pt) Discusión según el parámetro a .

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9(a + 3).$$

- Si $a \neq -3$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado** (solución única).
- Si $a = -3$: $|A| = 0$. Estudiando el rango de la matriz ampliada se comprueba que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < 3 \Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado** (una infinidad de soluciones, un grado de libertad).

2.2.2 (0,75 pt) Soluciones cuando es compatible indeterminado ($a = -3$).

Tomando $z = \lambda$ como parámetro libre y resolviendo las dos primeras ecuaciones (independientes) en función de λ :

$$(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{5}\lambda, \frac{3}{5} + \frac{9}{5}\lambda, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(sustituyendo cualquier valor de λ en las tres ecuaciones originales con $a = -3$ se comprueba que se satisfacen; cálculo hecho y verificado con **sympy**).

2.2.3 (0,75 pt) Solución para $a = 0$.

Resolviendo el sistema $3x - 2y - 3z = 0$, $2x - 5z = -3$, $x + y + 2z = 3$ (por Gauss o Cramer):

$$(x, y, z) = (1, 0, 1)$$

Comprobación: $3(1) - 0 - 3(1) = 0 \checkmark$; $2(1) - 5(1) = -3 \checkmark$; $1 + 0 + 2 = 3 \checkmark$.

Pregunta 3 – Geometría (2,5 puntos)

Opción 3.1

Recta r : $(x, y, z) = (1 + 2\lambda, \lambda, 2 - \lambda)$. Recta s : intersección de los planos $x = -1$ y $x + 2y + z = 0$.

3.1.1 (1 pt) Punto de corte de r y s .

Un punto de r tiene $x = 1 + 2\lambda$; para que esté en s debe cumplir $x = -1$:

$$1 + 2\lambda = -1 \implies \lambda = -1.$$

Sustituyendo: el punto es $(1 - 2, -1, 2 + 1) = (-1, -1, 3)$. Comprobamos que cumple la segunda ecuación de s : $-1 + 2(-1) + 3 = 0 \checkmark$.

$$(x, y, z) = (-1, -1, 3)$$

3.1.2 (1 pt) Plano que contiene a r y a s .

Vector director de r : $\vec{u} = (2, 1, -1)$. Vector director de s (de la parametrización $x = -1$, $y = \mu$, $z = -2\mu$): $\vec{v} = (0, 1, -2)$. El vector normal del plano es

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, -1) \times (0, 1, -2) = (-1, 4, 2).$$

Usando el punto de corte $(-1, -1, 3)$:

$$-1(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \implies x - 4y - 2z + 3 = 0$$

3.1.3 (0,5 pt) Distancia de $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano:

$$d = \frac{|1 - 4(0) - 2(2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0.$$

$$d = 0 \quad (P \text{ pertenece al plano, coincide con el punto de } r \text{ en } \lambda = 0)$$

Opción 3.2

Plano π : $3x - y + 2z = 4$; puntos $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.1 (1 pt) Plano perpendicular a π que pasa por P y Q .

El nuevo plano debe contener la dirección $\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 1)$ y ser perpendicular a π (normales perpendiculares entre sí). Su normal es

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\pi = (3, 1, 1) \times (3, -1, 2) = (3, -3, -6) \parallel (1, -1, -2).$$

Con el punto $P = (-1, 0, 1)$:

$$1(x + 1) - 1(y) - 2(z - 1) = 0 \implies \boxed{x - y - 2z + 3 = 0}$$

(Se comprueba que $Q = (2, 1, 2)$ también satisface: $2 - 1 - 4 + 3 = 0$ ✓.)

3.2.2 (0,5 pt) Distancia de Q a π :

$$d = \frac{|3(2) - 1(1) + 2(2) - 4|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|6 - 1 + 4 - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

$$\boxed{d = \frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1,336}$$

3.2.3 (1 pt) Punto simétrico de P respecto a π .

Recta perpendicular a π por P : $(x, y, z) = (-1 + 3t, -t, 1 + 2t)$. Sustituyendo en π :

$$3(-1 + 3t) - (-t) + 2(1 + 2t) = 4 \implies -3 + 9t + t + 2 + 4t = 4 \implies 14t = 5 \implies t = \frac{5}{14}.$$

Pie de la perpendicular: $F = \left(-1 + \frac{15}{14}, -\frac{5}{14}, 1 + \frac{10}{14}\right) = \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7}\right)$.

El simétrico es $P' = 2F - P$:

$$\boxed{P' = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)}$$

Pregunta 4 – Análisis (2,5 puntos)

Opción 4.1 – Caja de volumen fijo

Caja con base y tapa cuadradas de lado x y volumen 80 cm^3 , luego la altura es $h = \frac{80}{x^2}$. Las paredes cuestan 1 céntimo/ cm^2 ; la base y la tapa cuestan un 25% más, es decir 1,25 cént./ cm^2 .

4.1.1 (0,75 pt) Función de precio:

$$P(x) = \underbrace{4xh}_{\text{paredes}} + \underbrace{1,25 \cdot 2x^2}_{\text{base + tapa}} = 4x \cdot \frac{80}{x^2} + 2,5x^2.$$

$$P(x) = \frac{320}{x} + 2,5x^2$$

4.1.2 (1,25 pt) Minimizamos $P(x)$:

$$P'(x) = -\frac{320}{x^2} + 5x = 0 \implies 5x^3 = 320 \implies x^3 = 64 \implies x = 4.$$

(Se comprueba $P''(x) = 640/x^3 + 5 > 0$, luego es un mínimo.) La altura correspondiente:

$$h = \frac{80}{4^2} = 5.$$

$$x = 4 \text{ cm}, \quad h = 5 \text{ cm}$$

4.1.3 (0,5 pt) Precio mínimo:

$$P(4) = \frac{320}{4} + 2,5(16) = 80 + 40 = 120 \text{ céntimos.}$$

$$P_{\min} = 120 \text{ céntimos} = 1,20 \text{ euros}$$

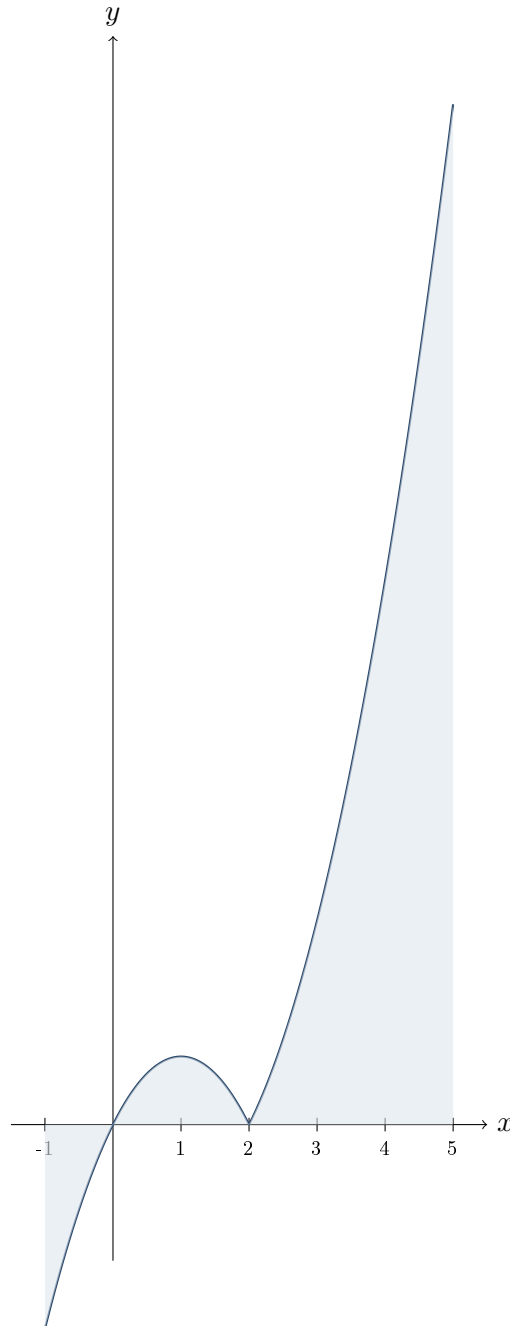
Opción 4.2 – $f(x) = x|x - 2|$

Definimos f por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 2, \\ x^2 - 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

4.2.1 (1 pt) Representación de la región entre f , el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 5$.

En $[-1, 0]$, $f(x) = 2x - x^2 < 0$ (por debajo del eje). En $[0, 2]$, $f(x) = 2x - x^2 \geq 0$ (parábola cóncava, máximo en $x = 1$, $f(1) = 1$). En $[2, 5]$, $f(x) = x^2 - 2x \geq 0$ (parábola convexa creciente desde $f(2) = 0$ hasta $f(5) = 15$).



4.2.2 (1,5 pt) Área de la región (suma de valores absolutos, ya que la curva cambia de signo):

$$\int_{-1}^0 (2x - x^2) dx = -\frac{4}{3} \Rightarrow \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}, \quad \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}, \quad \int_2^5 (x^2 - 2x) dx = 18.$$

$\text{Área} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{62}{3} \approx 20,67 \text{ u}^2$
