

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Extraordinaria 2025

Solucionario
2º de Bachillerato

Apartado 1 – Programación lineal y matrices	2
Apartado 2 – Análisis de funciones	5
Apartado 3 – Probabilidad	7

Apartado 1 – Programación lineal y matrices (3,5 puntos)

Problema 1.A – Programación lineal (3,5 pt)

Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. Obtiene 700 € de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 € por cada excursión a la playa. Dispone de 10 autobuses y 8 guías turísticos. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, y cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

Planteamiento. Sea x el número de excursiones a la montaña e y el número de excursiones a la playa. Se desea:

$$\text{Maximizar } B(x, y) = 700x + 500y$$

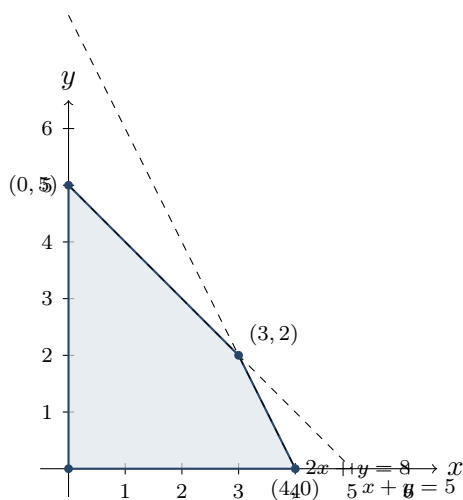
sujeto a las restricciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x + 2y \leq 10 & (\text{autobuses}) \\ 2x + y \leq 8 & (\text{guías}) \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{es decir} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

a) (3 pt) Región factible y vértices.

Las rectas $x + y = 5$ y $2x + y = 8$ se cortan en el punto $(3, 2)$ (resolviendo el sistema). La región factible es el polígono de vértices:

$$(0, 0), \quad (4, 0), \quad (3, 2), \quad (0, 5).$$



Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

Vértice	$B(x, y) = 700x + 500y$
$(0, 0)$	0
$(4, 0)$	2800
$(3, 2)$	$2100 + 1000 = 3100$
$(0, 5)$	2500

Máximo en $(x, y) = (3, 2)$: 3 excursiones a la montaña y 2 a la playa

b) (0,5 pt) Beneficio máximo:

$$B(3, 2) = 700(3) + 500(2) = 2100 + 1000 = 3100 \text{ €}$$

Problema 1.B – Matrices (3,5 pt)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (2,5 pt) Determina la matriz X solución de $2XA + B^tC = I$, con I la identidad de orden 3.

Como B y C son matrices 2×3 , B^t es 3×2 y el producto B^tC resulta 3×3 :

$$B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^tC = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Despejando: $2XA = I - B^tC \Rightarrow X = \frac{1}{2}(I - B^tC)A^{-1}$.

Calculamos A^{-1} (por ejemplo por adjuntos, con $|A| = 6$) y sustituimos, obteniendo:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Comprobación: sustituyendo X en $2XA + B^tC$ se obtiene exactamente I (verificado con **sympy**, calculando A^{-1} y el producto matricial completos con fracciones exactas).

b) (1 pt) Con $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, halla los valores de z para los que AD es diagonal.

$$AD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2z - 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para que AD sea diagonal, los elementos fuera de la diagonal deben anularse. Las dos únicas entradas no triviales fuera de la diagonal son $2z - 1$ (posición $1, 3$) y $1 - 2z$ (posición $2, 3$); ambas se anulan simultáneamente cuando:

$$2z - 1 = 0 \implies \boxed{z = \frac{1}{2}}$$

Apartado 2 – Análisis de funciones (3 puntos)

Problema 2.A – Desgaste de neumáticos (3 pt)

$$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}, D_B(x) = \frac{x^2}{3000}, \text{ para } x \in [0, 50] \text{ meses.}$$

a) (1 pt) Mes en que el desgaste coincide.

$$D_A(x) = D_B(x) \implies \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \implies 30 + 29x = x^2 \implies x^2 - 29x - 30 = 0.$$

Las raíces son $x = 30$ y $x = -1$; solo $x = 30$ pertenece al dominio $[0, 50]$.

$$\boxed{x = 30 \text{ meses}}$$

b) (1 pt) Intervalos donde el desgaste es menor para cada neumático.

Estudiamos el signo de $D_A(x) - D_B(x) = -\frac{x^2}{3000} + \frac{29x}{3000} + \frac{1}{100}$, que se anula solo en $x = 30$ dentro de $[0, 50]$. Evaluando en un punto de cada tramo (p. ej. $x = 10$: $D_A - D_B > 0$; $x = 40$: $D_A - D_B < 0$):

$$\boxed{\text{En } (0, 30) : D_B < D_A \text{ (desgasta menos el B)} \quad \text{En } (30, 50) : D_A < D_B \text{ (desgasta menos el A)}}$$

c) (1 pt) Áreas entre ambas curvas en cada intervalo.

En el intervalo donde el desgaste es menor para B, es decir $[0, 30]$:

$$\int_0^{30} (D_A(x) - D_B(x)) dx = \frac{33}{20} = 1,65.$$

En el intervalo donde el desgaste es menor para A, es decir $[30, 50]$:

$$\int_{30}^{50} (D_B(x) - D_A(x)) dx = \frac{133}{45} \approx 2,956.$$

$$\boxed{\text{Área en } [0, 30] = 1,65 \quad \text{Área en } [30, 50] = \frac{133}{45} \approx 2,956}$$

Problema 2.B – Estudio de una función racional (3 pt)

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}.$$

Simplificamos el denominador: $x(2x+4)+2 = 2x^2+4x+2 = 2(x+1)^2$. Operando la resta a común denominador se obtiene la expresión simplificada:

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}}$$

(comprobado con `sympy` que ambas expresiones son idénticas para todo $x \neq -1$).

a) (0,5 pt) Dominio y cortes con los ejes.

El denominador se anula solo en $x = -1$:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Corte con OY : $f(0) = 0$. Corte con OX : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Por tanto el único punto de corte con ambos ejes es el origen $(0,0)$.

b) (0,5 pt) Asíntotas.

Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$.

Vertical en $x = -1$: como el denominador $(x+1)^2 \rightarrow 0^+$ por ambos lados y el numerador tiende a -1 ,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

$$x = -1 \text{ (asíntota vertical, la función tiende a } -\infty \text{ por ambos lados)}$$

c) (2 pt) Monotonía y extremos.

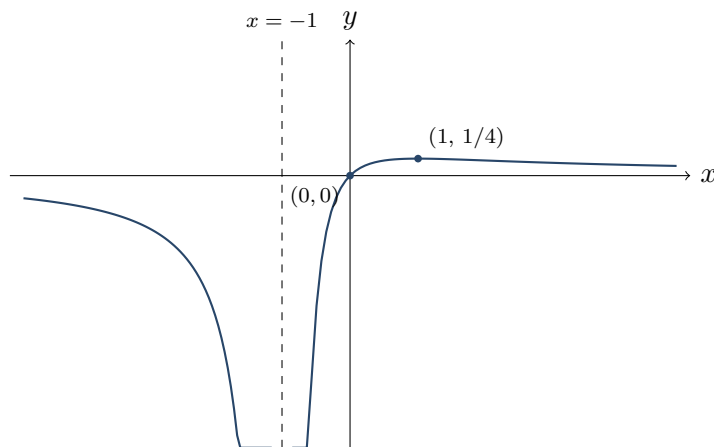
$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

El numerador $1-x$ se anula en $x = 1$ (positivo para $x < 1$, negativo para $x > 1$); el denominador $(x+1)^3$ es negativo para $x < -1$ y positivo para $x > -1$. Estudiando el signo de f' en cada tramo del dominio:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
f	decrece	crece	decrece

$$\text{Máximo relativo en } (1, \frac{1}{4}); \text{ no hay mínimo relativo}$$

d) (0,5 pt) Gráfica.



Se observa: la rama izquierda decrece hasta $-\infty$ cerca de $x = -1$, la rama central crece desde $-\infty$ hasta el máximo $(1, 1/4)$, y la rama derecha decrece asintóticamente hacia $y = 0$.

Apartado 3 – Probabilidad (3 puntos)

Encuesta a 2000 ciudadanos: 800 participan en limpieza de parques (P), 1400 en plantación de árboles (T), 300 en ambas, 100 en ninguna.

Trabajamos con probabilidades (frecuencias relativas):

$$P(P) = \frac{800}{2000} = 0,4, \quad P(T) = \frac{1400}{2000} = 0,7, \quad P(P \cap T) = \frac{300}{2000} = 0,15, \quad P(\text{ninguna}) = \frac{100}{2000} = 0,05.$$

a) (0,75 pt) Probabilidad de participar en al menos una de las dos actividades:

$$P(P \cup T) = 1 - P(\text{ninguna}) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Comprobación: $P(P) + P(T) - P(P \cap T) = 0,4 + 0,7 - 0,15 = 0,95$ (coincide).

$$P(P \cup T) = 0,95$$

b) (0,75 pt) Probabilidad de participar en limpieza de parques pero no en plantación de árboles:

$$P(P \cap \bar{T}) = P(P) - P(P \cap T) = 0,4 - 0,15 = 0,25.$$

$$P(P \cap \bar{T}) = 0,25$$

c) (0,75 pt) Probabilidad de participar en exactamente una de las dos actividades:

$$P(\text{exactamente una}) = [P(P) - P(P \cap T)] + [P(T) - P(P \cap T)] = 0,25 + 0,55 = 0,80.$$

$$P(\text{exactamente una}) = 0,80$$

d) (0,75 pt) Si el ciudadano no ha participado en plantación de árboles, probabilidad de que tampoco haya participado en limpieza de parques:

$$P(\bar{P} \mid \bar{T}) = \frac{P(\bar{P} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\text{ninguna})}{1 - P(T)} = \frac{0,05}{0,3} = \frac{1}{6}.$$

$$P(\bar{P} \mid \bar{T}) = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$