

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Extraordinaria 2026

Solucionario
2º de Bachillerato

Apartado 1 – Álgebra	2
Problema 1.A – Sistema de ecuaciones lineales	2
Problema 1.B – Programación lineal	4
Apartado 2 – Análisis	6
Problema 2.A – Concentración de un contaminante	6
Problema 2.B – Valor de activos financieros	8
Apartado 3 – Probabilidad	10
Problema 3 – Youtubers y vídeos virales	10

Apartado 1 – Álgebra

Problema 1.A – Sistema de ecuaciones lineales

Alberto, Braulio y Carlos viven en casas situadas en los puntos A , B y C de una recta, con el ayuntamiento en el origen, cumpliéndose $A < 0 < B < C$. Se sabe que:

- La suma de las tres posiciones es 3000: $A + B + C = 3000$.
- La distancia entre las casas de Alberto y Braulio es el doble de la distancia del ayuntamiento a la casa de Carlos: como $A < 0 < B$, $|A - B| = B - A$, y como $C > 0$, $|C - 0| = C$, luego

$$B - A = 2C \implies -A + B - 2C = 0.$$

- La distancia entre las casas de Alberto y Carlos es el triple de la distancia del ayuntamiento a la casa de Braulio: como $A < 0 < C$, $|A - C| = C - A$, y como $B > 0$, $|B - 0| = B$, luego

$$C - A = 3B \implies -A - 3B + C = 0.$$

Se obtiene así el sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 3000 \\ -A + B - 2C = 0 \\ -A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

Resolución por Gauss. Partimos de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 2 & -1 & 3000 \\ 0 & -2 & 2 & 3000 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 2 & -1 & 3000 \\ 0 & 0 & 1 & 6000 \end{array} \right) \end{aligned}$$

De la tercera fila, $C = 6000$. Sustituyendo en la segunda: $2B - 6000 = 3000 \Rightarrow B = 4500$. Sustituyendo en la primera: $A + 4500 + 6000 = 3000 \Rightarrow A = -7500$.

$$\boxed{A = -7500, \quad B = 4500, \quad C = 6000}$$

Comprobación de signos: $A = -7500 < 0 < B = 4500 < C = 6000$ ✓, coherente con el planteamiento. Además $A + B + C = -7500 + 4500 + 6000 = 3000$ ✓; $B - A = 4500 - (-7500) = 12000 = 2 \cdot 6000 = 2C$ ✓; $C - A = 6000 - (-7500) = 13500 = 3 \cdot 4500 = 3B$ ✓.

Nota (resolución alternativa por Cramer): el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 6) - 1(-1 - 2) + 1(3 + 1) = -5 + 3 + 4 = 2 \neq 0,$$

por lo que el sistema es compatible determinado y puede resolverse igualmente sustituyendo la columna de términos independientes en cada incógnita y dividiendo por este determinante, obteniéndose el mismo resultado.

Problema 1.B – Programación lineal

Sea x el número de horas de funcionamiento de la máquina A e y el de la máquina B . Cada hora, la máquina A produce 2 anillos, 8 pulseras y 4 collares, con un coste de 250€; la máquina B produce 9 anillos, 4 pulseras y 10 collares, con un coste de 600€. Deben fabricarse al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

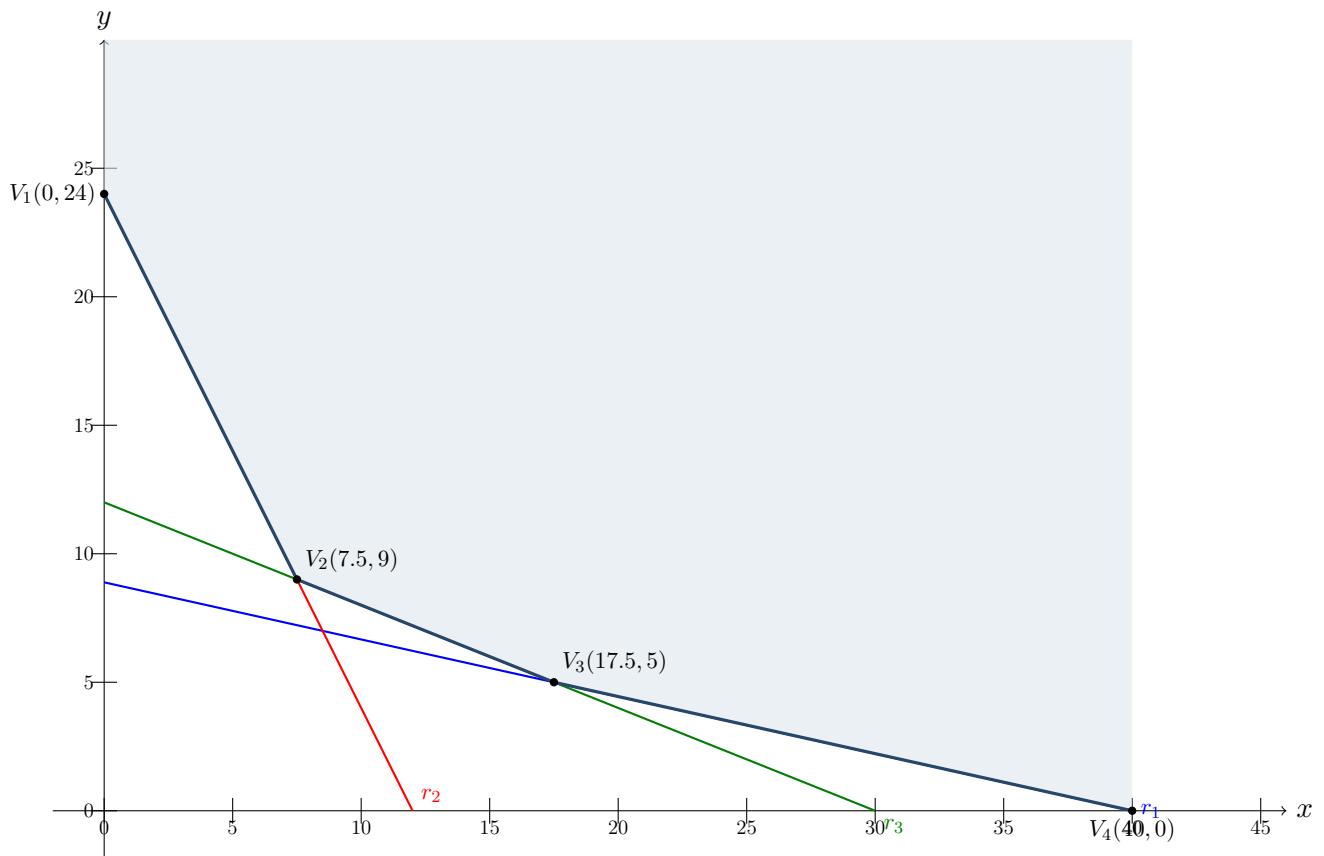
Planteamiento. La función objetivo (coste total, a minimizar) y las restricciones son:

$$C(x, y) = 250x + 600y$$
$$\begin{cases} 2x + 9y \geq 80 & (\text{anillos}) \\ 8x + 4y \geq 96 & (\text{pulseras}) \\ 4x + 10y \geq 120 & (\text{collares}) \\ x \geq 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

a) Región factible y vértices. La región factible es la intersección de los tres semiplanos (por encima de cada recta) con el primer cuadrante; no está acotada superiormente, pero sí tiene una frontera inferior poligonal formada por tramos de las tres rectas $r_1 : 2x + 9y = 80$, $r_2 : 8x + 4y = 96$ y $r_3 : 4x + 10y = 120$. Calculando los puntos de corte de cada recta con los ejes y entre sí, y comprobando cuáles cumplen las tres restricciones a la vez, los vértices de la región factible resultan ser:

$$V_1 = (0, 24), \quad V_2 = \left(\frac{15}{2}, 9\right), \quad V_3 = \left(\frac{35}{2}, 5\right), \quad V_4 = (40, 0)$$

donde V_1 está sobre r_2 (corte con el eje Y), V_2 es la intersección de r_2 y r_3 , V_3 es la intersección de r_1 y r_3 , y V_4 está sobre r_1 (corte con el eje X).



Evaluamos la función de coste $C(x, y) = 250x + 600y$ en cada vértice:

Vértice	Coste $C(x, y) = 250x + 600y$
$V_1 = (0, 24)$	$250(0) + 600(24) = 14400$
$V_2 = (7.5, 9)$	$250(7.5) + 600(9) = 7275$
$V_3 = (17.5, 5)$	$250(17.5) + 600(5) = 7375$
$V_4 = (40, 0)$	$250(40) + 600(0) = 10000$

El mínimo se alcanza en $V_2 = (7.5, 9)$, es decir:

$$x = 7.5 \text{ horas la máquina } A, \quad y = 9 \text{ horas la máquina } B$$

b) Coste mínimo.

$$C_{\min} = C(7.5, 9) = 250(7.5) + 600(9) = 1875 + 5400 = 7275\text{€}$$

Apartado 2 – Análisis

Problema 2.A – Concentración de un contaminante

La concentración de un contaminante viene dada por

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + a, & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1}, & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

a) Valor de a para la continuidad en $[0, 15]$. La única duda de continuidad está en $t = 6$ (cada tramo es continuo en su intervalo, un polinomio y un cociente sin ceros en el denominador). Igualamos los dos tramos en $t = 6$:

$$-6^2 + 8(6) + a = \frac{12(6) + 89}{6 + 1} \implies -36 + 48 + a = \frac{161}{7} \implies 12 + a = 23$$

$$\boxed{a = 11}$$

Con este valor, el primer tramo queda $C(t) = -t^2 + 8t + 11$, y se comprueba que $C(6) = 23$ coincide en ambos tramos.

b) Instante de máxima concentración en $[0, 6]$. Derivamos el primer tramo e igualamos a cero:

$$C'(t) = -2t + 8 = 0 \implies t = 4$$

Como $C''(t) = -2 < 0$, se trata de un máximo. El valor es

$$C(4) = -16 + 32 + 11 = 27 \text{ ppm}$$

Comparando con los extremos del intervalo, $C(0) = 11$ y $C(6) = 23$, confirmamos que $t = 4$ da efectivamente el máximo del tramo:

$$\boxed{t = 4 \text{ h}, \quad C(4) = 27 \text{ ppm}}$$

Para saber si es también el máximo absoluto en las 15 primeras horas, estudiamos el segundo tramo: como se verá en el apartado (c), $C(t)$ es estrictamente decreciente en $(6, 15]$, partiendo de $C(6) = 23$ y decreciendo hasta $C(15) = \frac{269}{16} = 16.8125 \text{ ppm}$. Por tanto, ningún valor del segundo tramo supera a $C(6) = 23$, que ya es menor que $C(4) = 27$. Así pues:

$$\boxed{\text{El máximo absoluto en } [0, 15] \text{ es } C(4) = 27 \text{ ppm, en } t = 4 \text{ h.}}$$

c) ¿Decrece de forma continuada en $(6, 15]$? Derivamos el segundo tramo, $C(t) = \frac{12t + 89}{t + 1}$, con la regla del cociente:

$$C'(t) = \frac{12(t + 1) - (12t + 89)}{(t + 1)^2} = \frac{12t + 12 - 12t - 89}{(t + 1)^2} = \frac{-77}{(t + 1)^2}$$

Como $(t + 1)^2 > 0$ para todo t del dominio, el signo de $C'(t)$ es siempre negativo:

$$\boxed{C'(t) = \frac{-77}{(t + 1)^2} < 0 \text{ para todo } t \in (6, 15] \implies C \text{ es estrictamente decreciente en } (6, 15]}$$

Por tanto, sí: la concentración se reduce de forma continuada (monótona decreciente) durante todo ese tramo.

Problema 2.A (continuación) – d) Intervalos de alerta

Se activa la alerta cuando $C(t) > 20$. Estudiamos cada tramo por separado.

Tramo $[0, 6]$: resolvemos $-t^2 + 8t + 11 > 20$, es decir $-t^2 + 8t - 9 > 0$, o equivalentemente $t^2 - 8t + 9 < 0$. Las raíces de $t^2 - 8t + 9 = 0$ son

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

Como la parábola $t^2 - 8t + 9$ es positiva fuera de las raíces y negativa entre ellas, la desigualdad $t^2 - 8t + 9 < 0$ se cumple para $4 - \sqrt{7} < t < 4 + \sqrt{7}$. Como $4 + \sqrt{7} \approx 6.65 > 6$, intersecando con el dominio $[0, 6]$ del tramo:

$$4 - \sqrt{7} < t \leq 6 \quad (4 - \sqrt{7} \approx 1.354)$$

Tramo $(6, 15]$: resolvemos $\frac{12t + 89}{t + 1} > 20$. Como $t + 1 > 0$ en este dominio, multiplicamos sin cambiar el sentido:

$$12t + 89 > 20(t + 1) \implies 12t + 89 > 20t + 20 \implies 69 > 8t \implies t < \frac{69}{8} = 8.625$$

Intersecando con $(6, 15]$: $6 < t < \frac{69}{8}$.

Unión de ambos tramos. Como $C(6) = 23 > 20$ pertenece al primer intervalo y ambos tramos empalman en $t = 6$, la alerta está activa de forma ininterrumpida entre los dos:

Alerta activa para $t \in \left(4 - \sqrt{7}, \frac{69}{8}\right) \approx (1.35 \text{ h}, 8.625 \text{ h})$

Problema 2.B – Valor de activos financieros

El valor de unos activos financieros (en millones de €) viene dado por $f(x) = Ax + \frac{B}{x+1}$, con $x \in [0, 5]$ (años), sabiendo que $f(0) = 4$ y $f(1) = 3$.

a) **Cálculo de A y B .** Sustituyendo:

$$f(0) = A(0) + \frac{B}{0+1} = B = 4$$

$$f(1) = A(1) + \frac{B}{1+1} = A + \frac{4}{2} = A + 2 = 3 \implies A = 1$$

$$\boxed{A = 1, \quad B = 4} \implies f(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

b) **Intervalo donde $f(x) > 4$.** Resolvemos $x + \frac{4}{x+1} > 4$. Como $x+1 > 0$ en $[0, 5]$, multiplicamos por $(x+1)$:

$$x(x+1) + 4 > 4(x+1) \implies x^2 + x + 4 > 4x + 4 \implies x^2 - 3x > 0 \implies x(x-3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple para $x < 0$ o $x > 3$. Intersecando con el dominio $[0, 5]$:

$$\boxed{f(x) > 4 \iff x \in (3, 5]}$$

(en efecto, $f(0) = 4$ y $f(3) = 3 + \frac{4}{4} = 3 + 1 = 4$ son los puntos donde f vale exactamente 4).

c) **Crecimiento y decrecimiento en $[0, 5]$.** Derivamos:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

El denominador es siempre positivo, así que el signo de $f'(x)$ lo determina el numerador $(x+3)(x-1)$. En $[0, 5]$, el factor $(x+3)$ es siempre positivo, luego el signo depende únicamente de $(x-1)$:

- Si $0 \leq x < 1$: $(x-1) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, f **decreciente**.
- Si $x = 1$: $f'(1) = 0$, punto crítico.
- Si $1 < x \leq 5$: $(x-1) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, f **creciente**.

$$\boxed{f \text{ es decreciente en } [0, 1] \text{ y creciente en } [1, 5]}$$

d) **Máximo y mínimo de f en $[0, 5]$.** Como f decrece hasta $x = 1$ y luego crece, $x = 1$ es un **mínimo relativo (y absoluto)**:

$$f(1) = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

Como el mínimo está en el interior, el máximo absoluto solo puede estar en los extremos del intervalo. Comparamos:

$$f(0) = 0 + \frac{4}{1} = 4, \quad f(5) = 5 + \frac{4}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3} \approx 5.67$$

Como $f(5) = \frac{17}{3} > f(0) = 4$, el máximo absoluto está en $x = 5$.

$$\boxed{\text{Mínimo en } x = 1, f(1) = 3 \text{ millones;} \quad \text{Máximo en } x = 5, f(5) = \frac{17}{3} \approx 5.67 \text{ millones}}$$

e) Área bajo $g(x) = (x + 1) \cdot f(x)$ entre $x = 2$ y $x = 3$. Simplificamos primero $g(x)$, ya que el término con B se cancela:

$$g(x) = (x + 1)f(x) = (x + 1) \left(x + \frac{4}{x + 1} \right) = (x + 1)x + (x + 1) \cdot \frac{4}{x + 1} = x^2 + x + 4$$

Como $g(x) = x^2 + x + 4 > 0$ en todo el intervalo $[2, 3]$ (no corta al eje OX), el área pedida es directamente la integral definida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^3 (x^2 + x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 12 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 8 \right) = \left(9 + \frac{9}{2} + 12 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 8 \right) \end{aligned}$$

Calculando con denominador común 6: el primer paréntesis es $\frac{54 + 27 + 72}{6} = \frac{153}{6}$ y el segundo es $\frac{16 + 12 + 48}{6} = \frac{76}{6}$, luego

$$\text{Área} = \frac{153}{6} - \frac{76}{6} = \frac{77}{6}$$

$\text{Área} = \frac{77}{6} \text{ unidades}^2 \approx 12.83 \text{ millones de } \text{€} \cdot \text{año}$
--

Apartado 3 – Probabilidad

Problema 3 – Youtubers y vídeos virales

El 30% de los youtubers de cierta categoría son “talentosos” (T), con probabilidad 0.5 de que su próximo vídeo se haga viral (V); el 70% restante son “no talentosos” ($\bar{T}$), con probabilidad 0.05 de viralidad. Es decir:

$$P(T) = 0.3, \quad P(\bar{T}) = 0.7, \quad P(V | T) = 0.5, \quad P(V | \bar{T}) = 0.05$$

a) Probabilidad de que el próximo vídeo sea viral (probabilidad total). Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(V) = P(T) \cdot P(V | T) + P(\bar{T}) \cdot P(V | \bar{T}) = 0.3 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.05$$

$$P(V) = 0.15 + 0.035$$

$$P(V) = 0.185$$

b) Si un vídeo se hizo viral, probabilidad de que su creador sea talentoso (teorema de Bayes).

$$P(T | V) = \frac{P(T) \cdot P(V | T)}{P(V)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.185} = \frac{0.15}{0.185}$$

$$P(T | V) = \frac{30}{37} \approx 0.8108 \text{ (81.08\%)}$$

c) De 4 vídeos de un youtuber NO talentoso, probabilidad de que al menos 2 sean virales.

El número de vídeos virales entre 4 vídeos de un youtuber no talentoso sigue una distribución binomial $X \sim B(4, 0.05)$. Queremos $P(X \geq 2)$, que calculamos como el complementario de $P(X = 0) + P(X = 1)$:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} (0.05)^0 (0.95)^4 = 0.95^4 = 0.81450625$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} (0.05)^1 (0.95)^3 = 4 \cdot 0.05 \cdot 0.857375 = 0.171475$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.81450625 - 0.171475$$

$$P(X \geq 2) = 0.01401875 \approx 1.40\%$$

d) De 100 vídeos de un youtuber talentoso, probabilidad de que al menos 40 sean virales.

Ahora $Y \sim B(100, 0.5)$. Como $n = 100$ es grande, aproximamos Y por una normal $N(\mu, \sigma)$ con

$$\mu = np = 100 \cdot 0.5 = 50, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{25} = 5$$

Aplicando la corrección de continuidad (paso de variable discreta a continua, $Y \geq 40 \rightarrow Z \geq 39.5$) y tipificando:

$$P(Y \geq 40) \approx P\left(Z \geq \frac{39.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geq -2.1)$$

Por simetría de la normal estándar, $P(Z \geq -2.1) = P(Z \leq 2.1)$. Consultando tablas (o calculando):

$$P(Z \leq 2.1) = 0.9821$$

$$P(Y \geq 40) \approx 0.9821 \text{ (98.21\%)}$$

Nota: el valor exacto (con la binomial sin aproximar) es $P(Y \geq 40) = 0.98240$, muy próximo a la aproximación normal, como cabía esperar al ser n grande y $p = 0.5$ (condición de buena aproximación: $np \geq 5$ y $n(1 - p) \geq 5$, ambas satisfechas holgadamente).