

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Ordinaria 2026

Solucionario
2º de Bachillerato

Apartado 1 – Álgebra y Programación Lineal	2
Apartado 2 – Análisis	6
Apartado 3 – Probabilidad	11

Apartado 1 – Álgebra y Programación Lineal

Problema 1.A – Matrices

Partimos de

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (2 puntos) Determinar X tal que $4XB + C^t D = I$.

Primero calculamos C^t (traspuesta de C , tamaño 2×3) y el producto $C^t D$ (que resulta 2×2):

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & -1+0+3 \\ 0-2+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Despejamos X de la ecuación matricial:

$$4XB = I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Como $|B| = 4 \cdot 3 - (-1)(-2) = 12 - 2 = 10 \neq 0$, B es invertible:

$$B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando:

$$X = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -3-4 & -1-8 \\ 6+2 & 2+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $4XB + C^t D$ debe dar I ; sustituyendo se recupera exactamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (verificado con `sympy`).

b) (1,5 puntos) Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Dada

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

determinar para qué valores de z la matriz FC es idempotente.

Calculamos primero FC (producto de una matriz 2×3 por una 3×2 , resultado 2×2):

$$FC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+z & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Imponemos $(FC)^2 = FC$:

$$(FC)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}.$$

Igualando entrada a entrada con $FC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 1+z=1 \\ z=0 \end{cases} \implies z=0.$$

Ambas ecuaciones (y las dos entradas restantes, que se cumplen idénticamente) son compatibles únicamente con $z=0$.

$$\boxed{z=0}$$

Problema 1.B – Programación lineal

Sea x = litros de NutriMax e y = litros de BioGrow. Los datos del enunciado dan lugar a las restricciones (nitrógeno, fósforo, potasio) y a la función de coste:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 8 & \text{(nitrógeno)} \\ x + y \geq 6 & \text{(fósforo)} \\ x + 2y \geq 10 & \text{(potasio)} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad C(x, y) = 5x + 4y \quad (\text{a minimizar}).$$

a) (3 puntos) Cálculo de los vértices de la región factible.

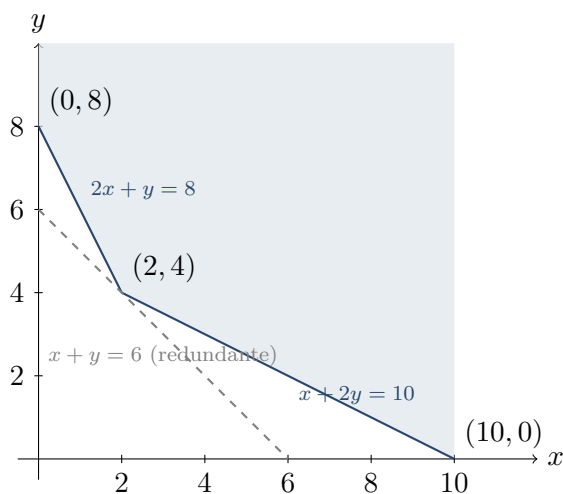
Intersectamos las rectas frontera dos a dos:

- $2x + y = 8$ con $x + y = 6$: restando, $x = 2$, $y = 4$.
- $x + y = 6$ con $x + 2y = 10$: restando, $y = 4$, $x = 2$.
- $2x + y = 8$ con $x + 2y = 10$: resolviendo, $x = 2$, $y = 4$.

Las tres rectas se cortan exactamente en el mismo punto $(2, 4)$: la restricción de fósforo ($x + y \geq 6$) pasa a ser redundante (se cumple con igualdad solo ahí, y con holgura en el resto de la frontera activa). La frontera de la región factible (que es no acotada hacia arriba y hacia la derecha) queda formada por:

- El segmento de $2x + y = 8$ entre el eje Y (punto $(0, 8)$) y $(2, 4)$.
- El segmento de $x + 2y = 10$ entre $(2, 4)$ y el eje X (punto $(10, 0)$).

Los vértices de la región factible son, por tanto, $(0, 8)$, $(2, 4)$ y $(10, 0)$.



Evaluamos la función de coste $C(x, y) = 5x + 4y$ en cada vértice:

Vértice	$C(x, y) = 5x + 4y$	
$(0, 8)$	$0 + 32 = 32$	
$(2, 4)$	$10 + 16 = 26$	← mínimo
$(10, 0)$	$50 + 0 = 50$	

El mínimo se alcanza en $(2, 4)$: hay que usar 2 litros de NutriMax y 4 litros de BioGrow.

b) (0,5 puntos) El coste mínimo es

$$C_{\min} = 5(2) + 4(4) = 10 + 16 = 26 \text{ euros}.$$

Apartado 2 – Análisis

Problema 2.A – Función definida a trozos

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

a) (1 punto) Continuidad y $g'(3) = \frac{23}{27} \Rightarrow$ hallar a, b, c .

Continuidad en $t = 1$: el límite por la izquierda es $1^2 + 2 = 3$; por la derecha, $\frac{a}{1} + 2 = a + 2$. Igualando:

$$a + 2 = 3 \implies \boxed{a = 1}.$$

Continuidad en $t = 2$: por la izquierda, $\frac{a}{2} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$; por la derecha, $2c + \frac{b}{4}$. Igualando:

$$2c + \frac{b}{4} = \frac{5}{2}. \quad (\text{i})$$

Derivabilidad en el tercer tramo: $g_3(t) = ct + \frac{b}{t^2}$, luego $g'_3(t) = c - \frac{2b}{t^3}$. Imponemos $g'_3(3) = \frac{23}{27}$:

$$c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27}. \quad (\text{ii})$$

Resolviendo el sistema (i)-(ii):

$$\boxed{a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1.}$$

(Comprobación: $2(1) + 2/4 = 2,5 \checkmark$; $1 - 2(2)/27 = 1 - 4/27 = 23/27 \checkmark$.)

La función queda completamente determinada:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ t + \frac{2}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

b) (1 punto) ¿Ha ido creciendo el valor de mercado con los tres gerentes?

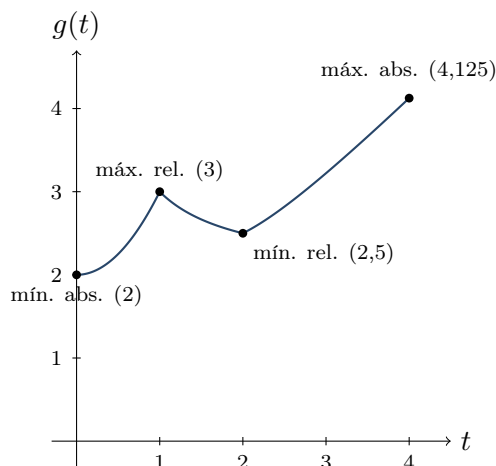
Estudiamos el signo de g' en cada tramo:

- En $[0, 1]$: $g'_1(t) = 2t \geq 0 \Rightarrow$ **creciente** (de $g(0) = 2$ a $g(1) = 3$).
- En $(1, 2]$: $g'_2(t) = -\frac{1}{t^2} < 0 \Rightarrow$ **decreciente** (de $g(1) = 3$ a $g(2) = 2,5$).

- En $(2, 4]$: $g'_3(t) = 1 - \frac{4}{t^3}$. Como $t > 2 \Rightarrow t^3 > 8 > 4 \Rightarrow \frac{4}{t^3} < 0,5 < 1$, luego $g'_3(t) > 0 \Rightarrow$ **creciente** (de $g(2) = 2,5$ a $g(4) = 4,125$).

No: el valor de mercado **decreció** durante la gestión del segundo gerente.

c) (0,5 puntos) Máximos y mínimos.



- **Máximo relativo** en $t = 1$, con $g(1) = 3$ (crece antes, decrece después).
- **Mínimo relativo** en $t = 2$, con $g(2) = 2,5$ (decrece antes, crece después).
- Comparando con los extremos del dominio, $g(0) = 2$ y $g(4) = 4 + \frac{2}{16} = \frac{33}{8} = 4,125$:

Mínimo absoluto: $t = 0$, $g(0) = 2$. Máximo absoluto: $t = 4$, $g(4) = \frac{33}{8} = 4,125$.

d) (1 punto) Salario del primer gerente = $100\,000 \int_0^1 g(t) dt$:

$$\int_0^1 (t^2 + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Salario} = 100\,000 \cdot \frac{7}{3} = \frac{700\,000}{3} \approx 233\,333,33 \text{ euros}$$

Problema 2.B – Optimización empresarial

Ingresos $I(x) = 400x$, gastos $G(x) = 4x^2 + 100$ (x en terabytes).

a) (1 punto) Beneficio $B(x) = I(x) - G(x) = 400x - 4x^2 - 100$.

$$B'(x) = 400 - 8x = 0 \implies x = 50.$$

Como $B''(x) = -8 < 0$, es un máximo.

$$B(50) = 400(50) - 4(50)^2 - 100 = 20\,000 - 10\,000 - 100 = 9\,900.$$

$x = 50$ TB, $B_{\max} = 9\,900$ u.m.

b) (1,5 puntos) Eficiencia financiera $E(x) = \frac{I(x)}{G(x)} = \frac{400x}{4x^2 + 100} = \frac{100x}{x^2 + 25}$.

$$E'(x) = \frac{100(x^2 + 25) - 100x(2x)}{(x^2 + 25)^2} = \frac{2500 - 100x^2}{(x^2 + 25)^2}.$$

Igualando a cero: $2500 - 100x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (tomamos la solución positiva, $x \geq 0$).

$$E(5) = \frac{100(5)}{25 + 25} = \frac{500}{50} = 10.$$

$x = 5$ TB, $E_{\max} = 10$ (los ingresos son 10 veces los gastos)
--

c) (1 punto) Calcular $\int_0^2 G(x)^2 dx$ con $G(x) = 4x^2 + 100$:

$$G(x)^2 = (4x^2 + 100)^2 = 16x^4 + 800x^2 + 10\,000.$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 (16x^4 + 800x^2 + 10\,000) dx &= \left[\frac{16x^5}{5} + \frac{800x^3}{3} + 10\,000x \right]_0^2 = \frac{16(32)}{5} + \frac{800(8)}{3} + 20\,000. \\ &= \frac{512}{5} + \frac{6400}{3} + 20\,000 = \frac{1536 + 32\,000 + 300\,000}{15} = \frac{333\,536}{15}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^2 G(x)^2 dx = \frac{333\,536}{15} \approx 22\,235,73}$$

Apartado 3 – Probabilidad

Problema 3

Composición de la plantilla: $P(\text{Be}) = 0,50$ (becarios), $P(\text{Ap}) = 0,35$ (aprendices), $P(\text{Ma}) = 0,15$ (maestros). Datos de estudios superiores (ES): $P(\text{ES} \mid \text{Be}) = 0,80$, $P(\text{ES} \mid \text{Ma}) = 1 - 0,15 = 0,85$, y $P(\text{ES}) = 0,79$ en total.

Primero hallamos $P(\text{ES} \mid \text{Ap})$ mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{ES}) = P(\text{Be})P(\text{ES} \mid \text{Be}) + P(\text{Ap})P(\text{ES} \mid \text{Ap}) + P(\text{Ma})P(\text{ES} \mid \text{Ma}),$$

$$0,79 = 0,5(0,8) + 0,35 P(\text{ES} \mid \text{Ap}) + 0,15(0,85) = 0,4 + 0,35 P(\text{ES} \mid \text{Ap}) + 0,1275.$$

$$0,35 P(\text{ES} \mid \text{Ap}) = 0,2625 \implies P(\text{ES} \mid \text{Ap}) = 0,75.$$

a) (1 punto) $P(\text{ES} \cap \text{Ap})$:

$$P(\text{ES} \cap \text{Ap}) = P(\text{Ap}) \cdot P(\text{ES} \mid \text{Ap}) = 0,35 \times 0,75 = 0,2625.$$

$$\boxed{P(\text{ES} \cap \text{Ap}) = 0,2625}$$

b) (1 punto) $P(\text{Ap} \mid \overline{\text{ES}})$: primero, $P(\overline{\text{ES}}) = 1 - 0,79 = 0,21$, y

$$P(\overline{\text{ES}} \cap \text{Ap}) = P(\text{Ap}) \cdot P(\overline{\text{ES}} \mid \text{Ap}) = 0,35 \times (1 - 0,75) = 0,35 \times 0,25 = 0,0875.$$

$$P(\text{Ap} \mid \overline{\text{ES}}) = \frac{P(\overline{\text{ES}} \cap \text{Ap})}{P(\overline{\text{ES}})} = \frac{0,0875}{0,21} = \frac{5}{12} \approx 0,4167.$$

$$\boxed{P(\text{Ap} \mid \overline{\text{ES}}) = \frac{5}{12} \approx 41,67\%}$$

c) (1 punto) $P[(\text{Ap} \cup \text{Be}) \cap (\text{ES} \cup \text{Ap})]$.

Como Be, Ap, Ma forman una partición (disjuntos y exhaustivos), distribuimos la intersección:

$$(\text{Ap} \cup \text{Be}) \cap (\text{ES} \cup \text{Ap}) = [\text{Ap} \cap (\text{ES} \cup \text{Ap})] \cup [\text{Be} \cap (\text{ES} \cup \text{Ap})] = \text{Ap} \cup (\text{Be} \cap \text{ES}),$$

ya que $\text{Ap} \subseteq (\text{ES} \cup \text{Ap})$ y $\text{Be} \cap \text{Ap} = \emptyset$. Además Ap y $(\text{Be} \cap \text{ES})$ son disjuntos (uno exige ser aprendiz, el otro ser becario), así que:

$$P[\text{Ap} \cup (\text{Be} \cap \text{ES})] = P(\text{Ap}) + P(\text{Be} \cap \text{ES}) = 0,35 + (0,5 \times 0,8) = 0,35 + 0,4 = 0,75.$$

$$\boxed{P[(\text{Ap} \cup \text{Be}) \cap (\text{ES} \cup \text{Ap})] = 0,75}$$