

Matemáticas II

PAU Comunidad Valenciana
Convocatoria Ordinaria 2026

Solucionario
2º de Bachillerato

Pregunta 1 – Probabilidad y Estadística	2
Pregunta 2 – Álgebra	3
Pregunta 3 – Geometría	7
Pregunta 4 – Análisis	9

Pregunta 1 – Probabilidad y Estadística

Enunciado: la enfermedad X afecta al 20% de la población. El test de antígenos da positivo en el 90% de los enfermos y en el 5% de los sanos.

Definimos los sucesos E = “estar enfermo”, S = “estar sano” = $\bar{E}$, y $+$ = “dar positivo en el test”. Los datos del enunciado son:

$$P(E) = 0.2, \quad P(S) = 0.8, \quad P(+ | E) = 0.9, \quad P(+ | S) = 0.05$$

1.1. Probabilidad de que el test dé positivo

Aplicando el teorema de la probabilidad total, condicionando en si la persona está enferma o sana:

$$P(+)=P(E) \cdot P(+ | E)+P(S) \cdot P(+ | S)=0.2 \cdot 0.9+0.8 \cdot 0.05=0.18+0.04$$

$$\boxed{P(+)=0.22}$$

1.2. Probabilidad de estar sano sabiendo que ha dado positivo

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(S | +)=\frac{P(S) \cdot P(+ | S)}{P(+)}=\frac{0.8 \cdot 0.05}{0.22}=\frac{0.04}{0.22}$$

$$\boxed{P(S | +)=\frac{2}{11} \approx 0.1818 \text{ (18.18\%)}}$$

1.3. Probabilidad de que, entre 8 personas, como máximo dos tengan la enfermedad

Sea X = “número de personas enfermas entre las 8 elegidas”. Como cada persona tiene independientemente probabilidad $p = 0.2$ de estar enferma, X sigue una distribución binomial:

$$X \sim B(n = 8, p = 0.2)$$

Queremos $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, con $P(X = k) = \binom{8}{k} p^k (1 - p)^{8-k}$:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0.2)^0 (0.8)^8 = 0.8^8 \approx 0.16777$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} (0.2)^1 (0.8)^7 = 8 \cdot 0.2 \cdot 0.8^7 \approx 0.33554$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} (0.2)^2 (0.8)^6 = 28 \cdot 0.04 \cdot 0.8^6 \approx 0.29360$$

Sumando:

$$\boxed{P(X \leq 2) \approx 0.16777 + 0.33554 + 0.29360 = 0.79692 \text{ (79.69\%)}}$$

Pregunta 2 – Álgebra

Opción 2.1

Enunciado: $T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (4, 4, -2)$.

2.1.1. Discusión del sistema $Tv = u$ según m .

Como T es cuadrada, aplicamos Rouché-Frobenius comparando $\text{rg}(T)$ con el número de incógnitas (3), estudiando primero $|T|$. Desarrollando por la tercera fila:

$$|T| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - m^2)$$

$$\boxed{|T| = -(m - 2)(m + 2) = 4 - m^2}$$

- Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$: $|T| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(T) = 3 = \text{n}^\circ$ incógnitas. Sistema **compatible determinado** (SCD), solución única para cualquier u (en particular, para $u = (4, 4, -2)$).

- Si $m = 2$: $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ (filas/columnas 1 y 3), así que $\text{rg}(T) = 2$.

Orlando con la columna ampliada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{filas 1 y 2 son iguales})$$

luego $\text{rg}(T \mid u) = 2 = \text{rg}(T) < 3$. Sistema **compatible indeterminado** (SCI): infinitas soluciones.

- Si $m = -2$: $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, análogamente $\text{rg}(T) = 2$ (mismo menor que antes). Orlando con

la columna ampliada, desarrollando por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2(4 - 4) = 0$$

Luego $\text{rg}(T \mid u) = 2 = \text{rg}(T) < 3$: también **compatible indeterminado** (SCI).

$$\boxed{m \neq \pm 2 \Rightarrow \text{SCD}; \quad m = \pm 2 \Rightarrow \text{SCI}}$$

2.1.2. Resolución para $m = -1$.

Para $m = -1$ (caso SCD, ya que $-1 \neq \pm 2$), el sistema es

$$\begin{cases} 2x - y &= 4 \\ -x + 2y &= 4 \\ z &= -2 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $z = -2$. De las dos primeras: sumando $2 \times (\text{ec. 2})$ a la ec. 1: $2x - y + 2(-x + 2y) = 4 + 8 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$. Sustituyendo en la primera: $2x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4$.

$$(x, y, z) = (4, 4, -2)$$

Comprobación: $2(4) - 4 = 4$; $-4 + 2(4) = 4$; $z = -2$. Correcto (en este caso particular la solución coincide numéricamente con u).

2.1.3. Tensiones principales de T para $m = 2$.

Buscamos los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, es decir, los **valores propios** de T con $m = 2$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(T - \alpha I) = \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) [(2 - \alpha)^2 - 4]$$

Desarrollando $(2 - \alpha)^2 - 4 = \alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha - 4)$:

$$\det(T - \alpha I) = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot (\alpha - 4) = 0$$

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 4$$

Opción 2.2

Enunciado: una matriz es ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta, $A^{-1} = A^t$.

2.2.1. Comprobar que $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ es ortogonal para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Basta comprobar que $A \cdot A^t = I$ (equivalente a $A^{-1} = A^t$, ya que si el producto por la traspuesta da la identidad, la traspuesta es efectivamente la inversa). Calculamos $A^t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ y multiplicamos:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Usando la identidad fundamental $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, los elementos de la diagonal valen 1 y los de fuera de la diagonal se cancelan (son iguales y opuestos):

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \implies A^{-1} = A^t \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Por tanto A es ortogonal para cualquier valor real de α (de hecho, esta matriz representa un giro de ángulo α en el plano).

2.2.2. Determinar a, b para que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

Imponemos $B^t B = I$. Calculamos $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el producto:

$$B^t B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Para que esto sea la identidad necesitamos $a^2 = 1$ y $b^2 = 1$, es decir:

$$a = \pm 1, \quad b = \pm 1$$

Como a puede tomar 2 valores y b otros 2 de forma independiente, existen

$$2 \times 2 = 4 \text{ matrices ortogonales de esa forma}$$

a saber, combinando $a \in \{1, -1\}$ con $b \in \{1, -1\}$.

2.2.3. Resolver $BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tomamos, de las cuatro matrices ortogonales posibles del apartado anterior, la correspondiente a $a = 1$, $b = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos X : $BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y como B es ortogonal, $B^{-1} = B^t$. Además, esta matriz B concreta es simétrica ($B^t = B$), así que $B^{-1} = B$:

$$X = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz B intercambia la fila 1 y la fila 3 del producto (por su estructura), dando:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Correcto.

Pregunta 3 – Geometría

Opción 3.1

Enunciado: $r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1}$, $\pi : 2x + my + z - 3 = 0$.

De la recta r obtenemos un punto $P = (0, 2, 2)$ y su vector director $\vec{d} = (2, 3, 1)$. El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, m, 1)$.

3.1.1. Valor de m para el que π y r son perpendiculares.

$\pi \perp r$ cuando la recta es perpendicular al plano, lo que ocurre cuando $\vec{d}$ es **paralelo** a $\vec{n}$ (la dirección de la recta coincide con la normal del plano). Imponemos $\vec{d} = k\vec{n}$:

$$(2, 3, 1) = k(2, m, 1) \implies 2 = 2k, 3 = km, 1 = k$$

De la primera y tercera ecuación, $k = 1$. Sustituyendo en la segunda: $3 = m$.

$$\boxed{m = 3}$$

3.1.2. Valor de m para el que π y r son paralelos.

$\pi \parallel r$ (sin que la recta esté contenida en el plano, o incluso si lo está, la condición direccional es la misma) cuando $\vec{d}$ es **perpendicular** a $\vec{n}$, es decir, $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 2(2) + 3(m) + 1(1) = 4 + 3m + 1 = 5 + 3m = 0$$

$$\boxed{m = -\frac{5}{3}}$$

(Comprobamos además que $P = (0, 2, 2) \notin \pi$ para este valor de m : $2(0) + (-\frac{5}{3})(2) + 2 - 3 = -\frac{10}{3} - 1 = -\frac{13}{3} \neq 0$, luego la recta es paralela al plano pero no está contenida en él.)

3.1.3. Punto de intersección entre π y r en función de m .

Parametrizamos la recta: $(x, y, z) = (2t, 2 + 3t, 2 + t)$, y sustituimos en la ecuación del plano:

$$2(2t) + m(2 + 3t) + (2 + t) - 3 = 0$$

$$4t + 2m + 3mt + 2 + t - 3 = 0 \implies t(5 + 3m) + (2m - 1) = 0$$

- Si $m \neq -\frac{5}{3}$ (es decir, $5 + 3m \neq 0$): existe un único valor de t ,

$$t = \frac{1 - 2m}{5 + 3m}$$

y el punto de intersección es

$$\boxed{(2t, 2 + 3t, 2 + t) \text{ con } t = \frac{1 - 2m}{5 + 3m}}$$

- Si $m = -\frac{5}{3}$: la ecuación queda $0 \cdot t + (2(-\frac{5}{3}) - 1) = -\frac{13}{3} \neq 0$, que es imposible para cualquier t . Esto confirma el resultado del apartado 3.1.2: la recta es **paralela** al plano y **no existe punto de intersección**.

$$\boxed{m \neq -\frac{5}{3} \Rightarrow \text{un único punto de corte; } \quad m = -\frac{5}{3} \Rightarrow \text{sin intersección (recta paralela al plano)}}$$

Opción 3.2

Enunciado: $s: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

La notación con denominador 0 en la componente x indica que el vector director es $\vec{d} = (0, 1, -1)$ y que la recta tiene coordenada x constante: $x = 1$. Un punto de la recta es $Q = (1, 1, 1)$.

3.2.1. Plano que pasa por $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a s .

Un plano perpendicular a s tiene como vector normal precisamente el vector director de la recta, $\vec{n} = \vec{d} = (0, 1, -1)$. La ecuación del plano que pasa por $(1, 1, 1)$ con esa normal es:

$$0 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) + (-1) \cdot (z - 1) = 0$$

$$\boxed{y - z = 0}$$

3.2.2. Puntos de la recta s a distancia 4 del origen.

Parametrizamos s : $(x, y, z) = (1, 1 + t, 1 - t)$. La distancia al origen al cuadrado es

$$d(t)^2 = 1^2 + (1 + t)^2 + (1 - t)^2$$

Desarrollando con cuidado: $(1 + t)^2 + (1 - t)^2 = 2 + 2t^2$, luego

$$d(t)^2 = 1 + 2 + 2t^2 = 3 + 2t^2$$

Imponemos $d(t)^2 = 16$:

$$3 + 2t^2 = 16 \implies 2t^2 = 13 \implies t^2 = \frac{13}{2} \implies t = \pm \sqrt{\frac{13}{2}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Sustituyendo en la parametrización, los puntos buscados son:

$$\boxed{\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right)}$$

Comprobación (numérica, $\sqrt{26}/2 \approx 2.5495$): $1^2 + 3.5495^2 + (-1.5495)^2 \approx 1 + 12.599 + 2.401 = 16$. Correcto.

3.2.3. Ángulo que forma s con el eje Z .

El eje Z tiene vector director $\vec{k} = (0, 0, 1)$, y el de s es $\vec{d} = (0, 1, -1)$. El ángulo θ entre una recta y un eje se calcula (tomando siempre el ángulo agudo, con valor absoluto en el numerador) mediante:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{k}|}{|\vec{d}| |\vec{k}|} = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ}$$

Pregunta 4 – Análisis

Opción 4.1

Enunciado: $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}}$.

Antes de nada, simplificamos la función usando las propiedades de las potencias, $\frac{e^x}{e^{2x}} = e^{x-2x} = e^{-x}$:

$$f(x) = e^{-x}$$

4.1.1. Dominio y continuidad.

La función exponencial e^{-x} está definida para cualquier valor real de x (no hay denominadores que se anulen, raíces de índice par ni logaritmos), por lo que:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Además, f es composición de funciones continuas (la exponencial y un polinomio), luego f es **continua en todo** $\mathbb{R}$.

4.1.2. Asíntotas e intervalos de crecimiento/decrecimiento.

Asíntotas verticales: no existen, ya que f es continua en todo $\mathbb{R}$ (no hay puntos donde el límite tienda a $\pm\infty$).

Asíntota horizontal: estudiamos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Por tanto, hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ (y ninguna cuando $x \rightarrow -\infty$, donde la función crece sin límite):

$$y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

Monotonía: derivamos, $f'(x) = -e^{-x}$. Como $e^{-x} > 0$ para todo x , se tiene $f'(x) < 0$ siempre:

$$f \text{ es estrictamente decreciente en todo } \mathbb{R}$$

4.1.3. Máximos y mínimos relativos y absolutos.

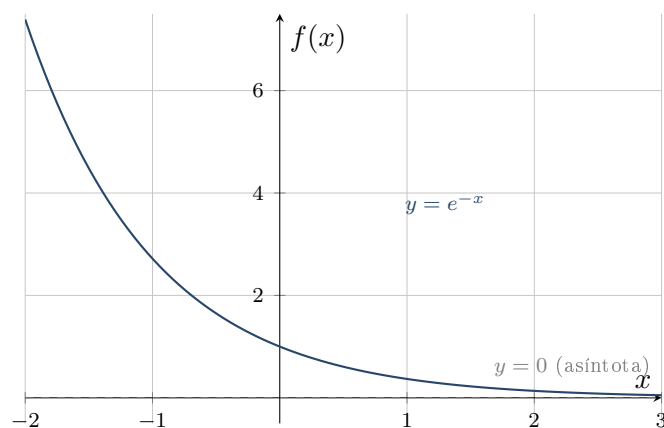
Como $f'(x) = -e^{-x}$ nunca se anula ($e^{-x} > 0$ siempre), no existen puntos críticos, por lo que:

$$\text{No hay máximos ni mínimos relativos}$$

Para los extremos absolutos estudiamos el rango de f : como f es decreciente en $\mathbb{R}$, con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (sin alcanzarlo nunca, pues $e^{-x} > 0$ para todo x finito), el rango es $(0, +\infty)$:

$$\text{No existen máximo ni mínimo absolutos (ínfimo } 0 \text{ y supremo } +\infty, \text{ no alcanzados)}$$

4.1.4. Representación gráfica de $f(x) = e^{-x}$.



La gráfica confirma lo obtenido analíticamente: una curva estrictamente decreciente, siempre positiva, que se aproxima a $y = 0$ por la derecha y crece sin límite hacia la izquierda, sin máximos ni mínimos.

Opción 4.2

Enunciado: pared de 12 m de largo por 3 m de alto; curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 2$, con $x \in [0, 12]$ (en metros).

4.2.1. Gráfica de la curva sobre la pared.

Estudiamos primero los datos necesarios para dibujar la curva en $[0, 12]$.

Cortes con los ejes: como $\cos$ toma valores en $[-1, 1]$, la función $f(x) = \cos(\pi x/6) + 2$ toma valores en $[1, 3]$ y **nunca se anula** (no corta al eje X). El corte con el eje Y es en $x = 0$: $f(0) = \cos(0) + 2 = 3$, es decir, el punto $(0, 3)$. También $f(12) = \cos(2\pi) + 2 = 3$.

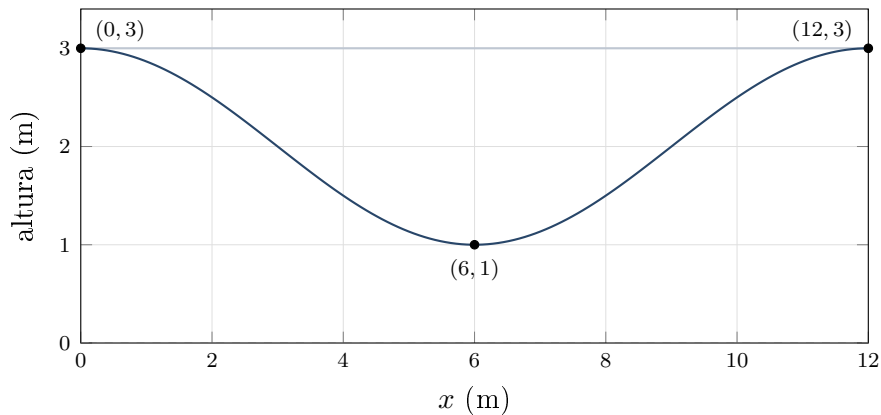
Extremos absolutos: derivando, $f'(x) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, que se anula cuando $\sin(\pi x/6) = 0$, es decir, en $x = 0, 6, 12$ dentro de $[0, 12]$.

$$f(0) = 3, \quad f(6) = \cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1, \quad f(12) = \cos(2\pi) + 2 = 3$$

Máximo absoluto: $f = 3$ en $x = 0$ y $x = 12$. Mínimo absoluto: $f = 1$ en $x = 6$.

Monotonía: en $(0, 6)$, $\sin(\pi x/6) > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreciente); en $(6, 12)$, $\sin(\pi x/6) < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (creciente):

f decrece en $[0, 6]$ y crece en $[6, 12]$



La banda superior (línea horizontal $y = 3$) marca el techo de la pared; el área **verde** es la comprendida entre la curva y esa línea superior, y el área **roja** la comprendida entre la curva y la base de la pared ($y = 0$), ambas para $x \in [0, 12]$ (ver criterio adoptado en el apartado siguiente).

4.2.2. Área de las zonas verde y roja.

Criterio adoptado: al no disponer del dibujo original a color, interpretamos —de forma coherente con un enunciado de este tipo, donde “verde” sugiere la parte alta/despejada y “roja” la parte baja pintada de un color distinto— que la zona **verde** es la región de la pared **por encima** de la curva y por debajo del techo ($y = 3$), y la zona **roja** es la región **por debajo** de la curva y por encima del suelo ($y = 0$), ambas en $x \in [0, 12]$. Nótese que, como $f(x) \in [1, 3]$ para todo x , estas dos regiones son complementarias y cubren toda la pared: Verde + Roja = $3 \times 12 = 36 \text{ m}^2$ (base $\times$ altura), lo que nos servirá de comprobación.

Área verde (entre la curva y $y = 3$):

$$A_{\text{verde}} = \int_0^{12} [3 - f(x)] dx = \int_0^{12} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right] dx$$

Calculamos la primitiva: $\int \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx = \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, luego

$$A_{\text{verde}} = \left[x - \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \right]_0^{12} = \left(12 - \frac{6}{\pi} \sin(2\pi) \right) - \left(0 - \frac{6}{\pi} \sin(0) \right) = 12 - 0$$

$$\boxed{A_{\text{verde}} = 12 \text{ m}^2}$$

Área roja (entre la curva y $y = 0$):

$$A_{\text{roja}} = \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 2 \right] dx = \left[\frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 2x \right]_0^{12}$$

$$A_{\text{roja}} = \left(\frac{6}{\pi} \sin(2\pi) + 24 \right) - \left(\frac{6}{\pi} \sin(0) + 0 \right) = 24 - 0$$

$$\boxed{A_{\text{roja}} = 24 \text{ m}^2}$$

Comprobación: $A_{\text{verde}} + A_{\text{roja}} = 12 + 24 = 36 = 3 \times 12 \text{ m}^2$, el área total de la pared. Correcto.

4.2.3. Botes de pintura mínimos para la zona verde.

Cada bote cubre 3 m^2 , y la superficie verde mide 12 m^2 :

$$\frac{12}{3} = 4$$

$\boxed{\text{Se necesitan 4 botes de pintura (exactos, sin sobrante) para la zona verde.}}$