

Matemáticas II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Extraordinaria 2024

Solucionario
2º de Bachillerato

Problema 1 – Matrices: invertibilidad, inversa y matrices que conmutan	2
Problema 2 – Ecuación matricial con parámetro	5
Problema 3 – Rectas que se cortan y perpendicular común	7
Problema 4 – Plano, distancia e intersección con los ejes	9
Problema 5 – Función, derivada y área entre curvas	12
Problema 6 – Optimización: caja de volumen máximo	15
Problema 7 – Probabilidad total y teorema de Bayes	17
Problema 8 – Distribución binomial	20

Problema 1 – Matrices (10 puntos)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

en que k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos $\det(A)$ desarrollando, por ejemplo, por la primera fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 0 - k(k \cdot (-1) - 1 \cdot 2) + 3(k \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot 2) = -k(-k - 2) + 3(-k - \frac{2}{3})$$

$$\det(A) = k^2 + 2k - 3k - 2 = k^2 - k - 2$$

Factorizando (o resolviendo la ecuación de segundo grado $k^2 - k - 2 = 0$, cuyas soluciones son $k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, es decir $k = 2$ y $k = -1$):

$$\det(A) = (k - 2)(k + 1)$$

Por tanto $\det(A) = 0 \iff k = 2$ ó $k = -1$. La matriz A es invertible para todos los demás valores:

$A \text{ es invertible} \iff k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

b) Para $k = 0$, calcular la matriz inversa de A (4 puntos)

Para $k = 0$ la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $0 \notin \{-1, 2\}$, por el apartado anterior sabemos que A es invertible, con $\det(A) = (0 - 2)(0 + 1) = -2$.

Paso 1. Matriz de adjuntos (cofactores) $\text{Adj}(A)$. Calculamos cada adjunto $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor obtenido al eliminar la fila i y la columna j :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(0 + 3) = -3 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2. Trasponer para obtener la matriz adjunta traspuesta (que es la que interviene en la fórmula de la inversa):

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3. Dividir entre el determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Comprobación: se verifica que $A \cdot A^{-1} = I_3$ (cálculo realizado y comprobado con *sympy*).

c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$ (4 puntos)

Buscamos matrices diagonales $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ tales que conmuten con A (con $k = 0$). Calculamos por separado los dos productos.

Producto AD (cada columna j de A se multiplica por d_j):

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_3 \\ 0 & \frac{1}{3}d_2 & d_3 \\ 2d_1 & -d_2 & -d_3 \end{pmatrix}$$

Producto DA (cada fila i de A se multiplica por d_i):

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_1 \\ 0 & \frac{1}{3}d_2 & d_2 \\ 2d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix}$$

Imponiendo $AD = DA$, igualamos entrada a entrada. Las posiciones $(2, 2)$ y $(3, 3)$ coinciden automáticamente ($\frac{1}{3}d_2 = \frac{1}{3}d_2$ y $-d_3 = -d_3$). Quedan las ecuaciones no triviales:

$$(1, 3): \quad 3d_3 = 3d_1 \Rightarrow d_1 = d_3$$

$$(2, 3): \quad d_3 = d_2 \Rightarrow d_2 = d_3$$

$$(3, 1): \quad 2d_1 = 2d_3 \Rightarrow d_1 = d_3 \quad (\text{repetida})$$

$$(3, 2): \quad -d_2 = -d_3 \Rightarrow d_2 = d_3 \quad (\text{repetida})$$

El sistema se reduce a $d_1 = d_2 = d_3$. Es decir, las únicas matrices diagonales que conmutan con A son las matrices escalares (múltiplos de la identidad):

$$D = \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Esto tiene sentido geoméricamente: al no ser A diagonal (tiene entradas fuera de la diagonal no proporcionales entre sí), la única forma de que una matriz diagonal conmute con ella es que sea un múltiplo escalar de la identidad, que conmuta con cualquier matriz.

Problema 2 – Ecuación matricial con parámetro (10 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro real y α, β, γ son incógnitas. Se considera la ecuación matricial $A^2X = B$.

a) Valores de a para los que $A^2X = B$ tiene solución única (5 puntos)

La ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución única (para cualquier B) si y solo si la matriz de coeficientes A^2 es invertible, es decir, $\det(A^2) \neq 0$. Como $\det(A^2) = \det(A)^2$, esto equivale a pedir $\det(A) \neq 0$ (si A es invertible, también lo es A^2 , y recíprocamente).

Calculamos $\det(A)$ desarrollando por la segunda columna (que tiene dos ceros):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = -0 \cdot (\dots) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot (\dots)$$

Más explícitamente, desarrollando por la fila 1:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 0) + 2 \cdot (0 - 2a) = 6 - 4a$$

Por tanto:

$$\det(A) = 0 \iff 6 - 4a = 0 \iff a = \frac{3}{2}$$

Como $\det(A^2) = (6 - 4a)^2$, se anula exactamente para el mismo valor $a = \frac{3}{2}$. En consecuencia:

$$A^2X = B \text{ tiene solución única} \iff a \neq \frac{3}{2}$$

(Para $a = \frac{3}{2}$, A –y por tanto A^2 – no es invertible, y el sistema $A^2X = B$ sería, según B , incompatible o compatible indeterminado, pero nunca de solución única.)

b) Si $(3, -2, -1)$ es solución de $A^2X = B$, hallar α, β, γ en función de a (5 puntos)

Si $X = (3, -2, -1)^t$ es solución de $A^2X = B$, entonces, por definición, $B = A^2X$. Basta calcular A^2 y después multiplicarla por X .

Paso 1. Calcular $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 8 \\ a+9 & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

(Por ejemplo, la entrada $(1, 1)$ es $1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot a = 2a + 1$; la entrada $(1, 3)$ es $1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$; la entrada $(2, 1)$ es $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot a = a + 9$; el resto se calcula análogamente, multiplicando fila por columna.)

Paso 2. Multiplicar A^2 por $X = (3, -2, -1)^t$:

$$B = A^2X = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 8 \\ a+9 & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2a+1) + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ 3(a+9) + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4a + 0 \cdot (-2) + (2a+9) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 6a+3-8 \\ 3a+27-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$\alpha = 6a - 5,$	$\beta = 3a + 8,$	$\gamma = 10a - 9$
--------------------	-------------------	--------------------

Problema 3 – Rectas que se cortan (10 puntos)

Se dan las rectas

$$r : x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}, \quad s : \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}.$$

a) Comprobar que se cortan y calcular el punto de intersección P (5 puntos)

De las ecuaciones continuas identificamos un punto y un vector director de cada recta:

$$r : P_r = (1, 2, 1), \quad \vec{v}_r = (1, 1, 2) \quad s : P_s = (3, 3, -1), \quad \vec{v}_s = (-2, -1, 2)$$

En primer lugar, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales (no existe λ con $\vec{v}_r = \lambda \vec{v}_s$), luego r y s no son paralelas ni coincidentes: o se cortan, o se cruzan. Para decidirlo, escribimos ambas rectas en forma paramétrica e igualamos:

$$r : (x, y, z) = (1 + t, 2 + t, 1 + 2t), \quad s : (x, y, z) = (3 - 2\mu, 3 - \mu, -1 + 2\mu)$$

Igualando coordenada a coordenada se obtiene el sistema (en t, μ):

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2\mu \\ 2 + t = 3 - \mu \\ 1 + 2t = -1 + 2\mu \end{cases} \implies \begin{cases} t + 2\mu = 2 \\ t + \mu = 1 \\ 2t - 2\mu = -2 \end{cases}$$

Resolvemos con las dos primeras ecuaciones: restando, $\mu = 1$, y sustituyendo en la segunda, $t = 0$. Comprobamos que esta solución satisface también la tercera ecuación: $2(0) - 2(1) = -2 \checkmark$. Como el sistema (con 3 ecuaciones y 2 incógnitas) es compatible, las rectas **se cortan** en un único punto. Sustituyendo $t = 0$ en la ecuación de r (o, equivalentemente, $\mu = 1$ en la de s , obteniéndose el mismo resultado):

$$P = (1 + 0, 2 + 0, 1 + 0) = (1, 2, 1), \quad \text{comprobación con } s : (3 - 2, 3 - 1, -1 + 2) = (1, 2, 1) \checkmark$$

$P = (1, 2, 1)$

b) Recta por P perpendicular a r y a s (5 puntos)

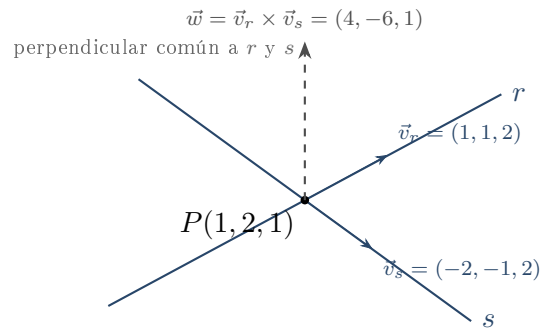
Buscamos una recta que pase por P y sea perpendicular simultáneamente a r y a s . Su vector director $\vec{w}$ debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ y a $\vec{v}_s$ a la vez, lo cual se consigue tomando el producto vectorial de ambos:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1))\vec{i} - (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2))\vec{j} + (1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2))\vec{k}$$

$$\vec{w} = (2 + 2)\vec{i} - (2 + 4)\vec{j} + (-1 + 2)\vec{k} = (4, -6, 1)$$

La recta buscada pasa por $P = (1, 2, 1)$ con dirección $\vec{w} = (4, -6, 1)$:

$$\boxed{\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}}$$



(Esquema conceptual, sin escala real: muestra r y s cortándose en P , y la dirección de la recta perpendicular a ambas.)

Problema 4 – Plano y sus intersecciones con los ejes (10 puntos)

Sea el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$.

a) Valores de d para que la distancia del plano al origen sea 1 (2 puntos)

La distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por

$$\text{dist} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aquí $A = 6$, $B = 4$, $C = -3$, $D = -d$, y el punto es el origen $(0, 0, 0)$:

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

Imponiendo que esta distancia sea igual a 1:

$$\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \implies |d| = \sqrt{61}$$

$$\boxed{d = \sqrt{61} \quad \text{o} \quad d = -\sqrt{61}}$$

b) Puntos A , B , C de corte con los ejes, en función de d (3 puntos)

Para hallar el punto de corte con el eje X hacemos $y = 0$, $z = 0$ en la ecuación del plano:

$$6x - d = 0 \implies x = \frac{d}{6} \implies A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

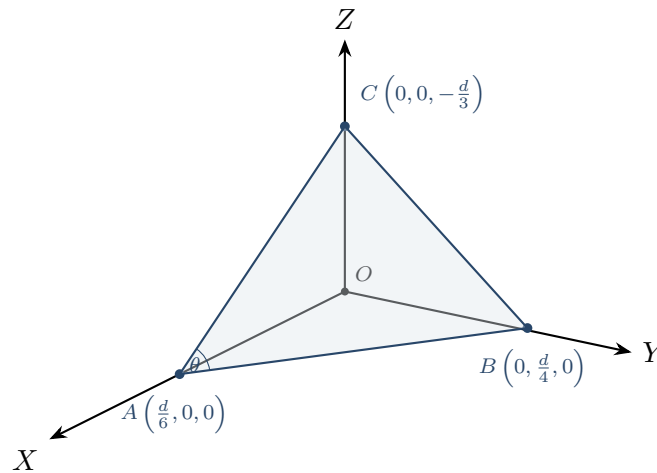
Para el eje Y hacemos $x = 0$, $z = 0$:

$$4y - d = 0 \implies y = \frac{d}{4} \implies B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

Para el eje Z hacemos $x = 0$, $y = 0$:

$$-3z - d = 0 \implies z = -\frac{d}{3} \implies C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

$A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right), \quad C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$



(Esquema conceptual de los ejes coordenados y la traza triangular del plano π sobre ellos; θ es el ángulo pedido en el apartado c.)

c) Para $d \neq 0$, ángulo entre los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ (5 puntos)

Calculamos los vectores pedidos a partir de los puntos del apartado anterior:

$$\vec{AB} = B - A = \left(0 - \frac{d}{6}, \frac{d}{4} - 0, 0 - 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\vec{AC} = C - A = \left(0 - \frac{d}{6}, 0 - 0, -\frac{d}{3} - 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

El ángulo θ entre ambos vectores se obtiene con la fórmula del coseno:

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$$

Producto escalar:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \left(-\frac{d}{6}\right) \left(-\frac{d}{6}\right) + \left(\frac{d}{4}\right) (0) + (0) \left(-\frac{d}{3}\right) = \frac{d^2}{36}$$

Módulos:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{d^2 \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{16}\right)} = |d| \sqrt{\frac{4+9}{144}} = |d| \frac{\sqrt{13}}{12}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = |d| \sqrt{\frac{1+4}{36}} = |d| \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Sustituyendo (y observando que $d^2 = |d|^2$, por lo que el signo de d no influye en el resultado final):

$$\cos \theta = \frac{\frac{d^2}{36}}{|d| \frac{\sqrt{13}}{12} \cdot |d| \frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{d^2 \frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{72}{36\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{65}}{65} \approx 0.2481 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{65}\right) \approx 75.64^\circ$$

Nota: el ángulo no depende del valor concreto de d (ni de su signo), ya que A , B y C son siempre proporcionales a d : al calcular el coseno, d^2 se cancela. Esto se ha comprobado explícitamente con `sympy` sustituyendo valores numéricos de d (por ejemplo $d = 12$ y $d = -12$), obteniéndose en ambos casos el mismo ángulo.

Problema 5 – Función, derivada y área entre curvas (10 puntos)

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real.

a) Valor de a para el que h tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$ (3 puntos)

En un extremo relativo, la derivada primera se anula. Calculamos:

$$h'(x) = a + 2x$$

Imponemos $h'(-\frac{3}{4}) = 0$:

$$a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \implies a - \frac{3}{2} = 0 \implies a = \frac{3}{2}$$

Comprobamos que efectivamente se trata de un **mínimo** con el criterio de la segunda derivada:

$$h''(x) = 2 > 0 \quad (\text{para todo } x, \text{ y en particular en } x = -\frac{3}{4})$$

Como $h''(-\frac{3}{4}) = 2 > 0$, se confirma que $x = -\frac{3}{4}$ es un mínimo relativo (de hecho, absoluto, al ser h una parábola con ramas hacia arriba).

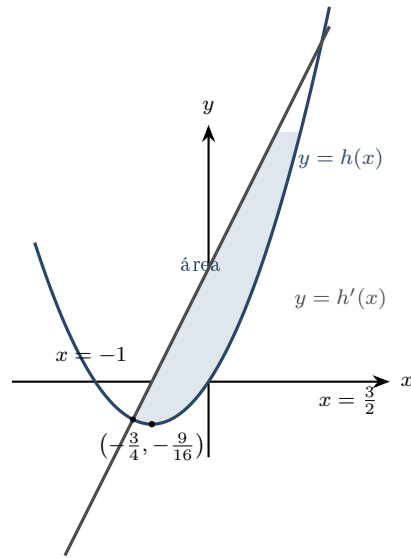
$$\boxed{a = \frac{3}{2}}$$

b) Dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$ (2 puntos)

Con $a = \frac{3}{2}$, las funciones quedan:

$$h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \qquad h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

$y = h(x)$ es una parábola con vértice en $x = -\frac{3}{4}$ (el mínimo hallado en a), con $h(-\frac{3}{4}) = -\frac{9}{16}$, que corta al eje X en $x = 0$ y $x = -\frac{3}{2}$ (raíces de $x^2 + \frac{3}{2}x = x(x + \frac{3}{2}) = 0$). $y = h'(x)$ es la recta tangente... en realidad la función derivada, una recta de pendiente 2 que corta al eje X en $x = -\frac{3}{4}$ (coincidiendo, lógicamente, con la abscisa del vértice de la parábola) y al eje Y en $y = \frac{3}{2}$.



(Gráfica de la parábola $h(x)$ y de la recta $h'(x)$; la región sombreada es el área calculada en el apartado c.)

c) Área entre ambas curvas (5 puntos)

El área entre dos curvas se calcula integrando el valor absoluto de su diferencia entre los puntos de corte. Primero hallamos dónde se cortan $h(x)$ y $h'(x)$:

$$h(x) - h'(x) = \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) - \left(2x + \frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Resolvemos $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ (equivalentemente, $2x^2 - x - 3 = 0$):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \implies x = \frac{3}{2} \text{ o } x = -1$$

Para saber el signo de $h(x) - h'(x)$ entre $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$, evaluamos en un punto intermedio, por ejemplo $x = 0$:

$$h(0) - h'(0) = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0$$

Luego en ese intervalo $h(x) < h'(x)$, y el área es:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3/2} (h'(x) - h(x)) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3/2}$$

Evaluamos en $x = \frac{3}{2}$:

$$-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{27/8}{3} + \frac{9/4}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{-18 + 9 + 36}{16} = \frac{27}{16}$$

Evaluamos en $x = -1$:

$$-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{4 + 3 - 18}{12} = -\frac{11}{12}$$

Restando:

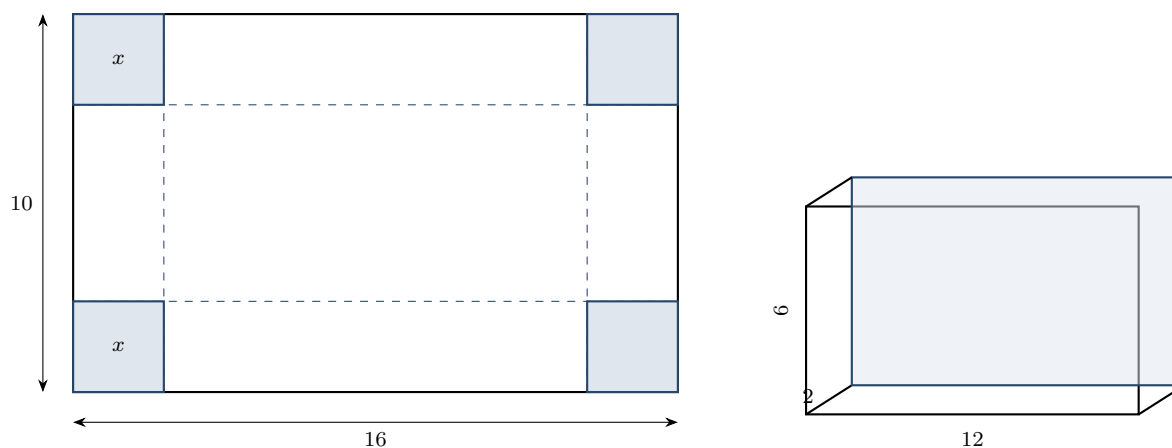
$$\text{Área} = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{81 + 44}{48} = \frac{125}{48}$$

$$\text{Área} = \frac{125}{48} \text{ u}^2 \approx 2.6042 \text{ u}^2$$

(Resultado verificado con integración simbólica en *sympy*.)

Problema 6 – Optimización: caja de volumen máximo (10 puntos)

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de $16\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, recortando un cuadrado de lado x en cada esquina, doblando y levantando los cuatro laterales.



(Izquierda: desarrollo plano de la hoja 16×10 con los cuadrados de lado x recortados en las esquinas.
Derecha: caja ya montada con las dimensiones óptimas halladas en el apartado a: $12 \times 6 \times 2$.)

a) Dimensiones de la caja de volumen máximo (8 puntos)

Al recortar un cuadrado de lado x en cada esquina y levantar los laterales, la base de la caja mide $(16 - 2x)$ por $(10 - 2x)$, y la altura es x . El volumen es:

$$V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x)$$

Desarrollamos el producto:

$$(16 - 2x)(10 - 2x) = 160 - 32x - 20x + 4x^2 = 4x^2 - 52x + 160$$

$$V(x) = x(4x^2 - 52x + 160) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

Dominio de x : para que las dimensiones tengan sentido (longitudes positivas) necesitamos $x > 0$ y, como el lado corto de la hoja mide 10, también $10 - 2x > 0$, es decir $x < 5$. Por tanto $x \in (0, 5)$.

Derivamos e igualamos a cero para hallar los puntos críticos:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

Dividiendo entre 4 para simplificar: $3x^2 - 26x + 40 = 0$. Resolvemos con la fórmula general:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 3 \cdot 40}}{2 \cdot 3} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 480}}{6} = \frac{26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{26 \pm 14}{6}$$

$$x = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6.67 \qquad x = \frac{12}{6} = 2$$

Como $x \in (0, 5)$, descartamos $x = \frac{20}{3} \approx 6.67$ (fuera del dominio) y nos quedamos con $x = 2$.

Comprobamos que es un máximo con la segunda derivada:

$$V''(x) = 24x - 104 \quad \implies \quad V''(2) = 48 - 104 = -56 < 0$$

Como $V''(2) < 0$, efectivamente $x = 2$ es un máximo relativo (y, al ser el único punto crítico en el interior del dominio $(0, 5)$, con $V \rightarrow 0$ en los extremos del dominio, es también el máximo absoluto).

Las dimensiones de la caja son:

$$\text{base: } 16 - 2(2) = 12 \text{ cm}, \qquad 10 - 2(2) = 6 \text{ cm}, \qquad \text{altura: } x = 2 \text{ cm}$$

Dimensiones óptimas: 12 cm $\times$ 6 cm $\times$ 2 cm

b) Volumen máximo (2 puntos)

Sustituimos $x = 2$ en $V(x)$:

$$V(2) = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$$

$V_{\text{máx}} = 144 \text{ cm}^3$

Problema 7 – Probabilidad total y teorema de Bayes (10 puntos)

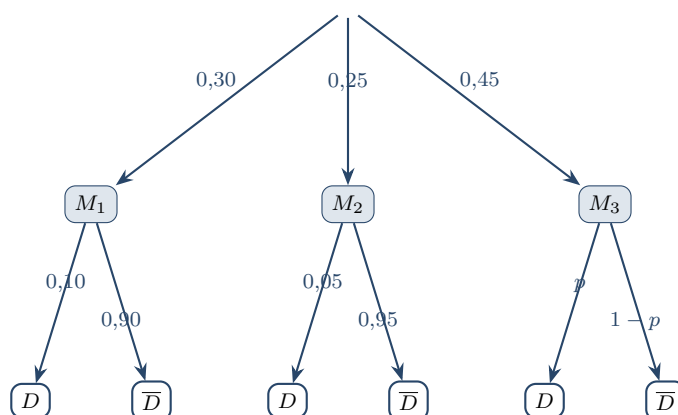
Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10,25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica la primera máquina (M_1), siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica la segunda máquina (M_2), siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica la tercera máquina (M_3).

Datos y diagrama de árbol

Llamamos D al suceso “la lata es defectuosa”. Los datos del enunciado son:

$$P(M_1) = 0,30, \quad P(D | M_1) = 0,10 \quad P(M_2) = 0,25, \quad P(D | M_2) = 0,05$$

$$P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2) = 1 - 0,30 - 0,25 = 0,45 \quad P(D) = 0,1025$$



(Diagrama de árbol del experimento: máquina → defectuosa/no defectuosa. El valor $p = P(D | M_3)$ es la incógnita del apartado a.)

a) Probabilidad de que una lata de la tercera máquina sea defectuosa (4 puntos)

Por el teorema de la probabilidad total, aplicado al sistema completo de sucesos $\{M_1, M_2, M_3\}$:

$$P(D) = P(M_1)P(D | M_1) + P(M_2)P(D | M_2) + P(M_3)P(D | M_3)$$

Sustituyendo los datos conocidos, con $p = P(D | M_3)$ como incógnita:

$$0,1025 = 0,30 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot p$$

$$0,1025 = 0,03 + 0,0125 + 0,45p = 0,0425 + 0,45p$$

$$0,45p = 0,1025 - 0,0425 = 0,06 \implies p = \frac{0,06}{0,45} = \frac{2}{15}$$

$$P(D | M_3) = \frac{2}{15} \approx 0,1333$$

b) Si la lata no es defectuosa, probabilidad de que sea de M_1 (3 puntos)

Se pide $P(M_1 | \overline{D})$. Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(M_1 | \overline{D}) = \frac{P(M_1) P(\overline{D} | M_1)}{P(\overline{D})}$$

Calculamos primero $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,1025 = 0,8975 = \frac{359}{400}$.

Como $P(\overline{D} | M_1) = 1 - P(D | M_1) = 1 - 0,10 = 0,90$:

$$P(M_1 | \overline{D}) = \frac{0,30 \cdot 0,90}{0,8975} = \frac{0,27}{0,8975} = \frac{108}{359}$$

$P(M_1 \overline{D}) = \frac{108}{359} \approx 0,3008$
--

c) Si la lata es defectuosa, probabilidad de que no sea de M_2 (3 puntos)

Se pide $P(\overline{M_2} \mid D) = 1 - P(M_2 \mid D)$. Por Bayes:

$$P(M_2 \mid D) = \frac{P(M_2) P(D \mid M_2)}{P(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,1025} = \frac{0,0125}{0,1025} = \frac{5}{41}$$

Por tanto:

$$P(\overline{M_2} \mid D) = 1 - \frac{5}{41} = \frac{36}{41}$$

$$P(\overline{M_2} \mid D) = \frac{36}{41} \approx 0,8780$$

(Comprobación: $P(M_1 \mid D) + P(M_3 \mid D) = \frac{36}{41}$ también, calculando cada uno por Bayes –verificado con sympy usando fracciones exactas.)

Problema 8 – Distribución binomial (10 puntos)

Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp.

Planteamiento

Sea X = “número de mensajes, de los 10 enviados, que llevan emoticono”. Como cada mensaje lleva emoticono de forma independiente con probabilidad $p = 0,6$ (y no, con probabilidad $q = 1 - p = 0,4$), X sigue una distribución binomial:

$$X \sim B(n = 10, p = 0,6)$$

cuya función de probabilidad es

$$P(X = k) = \binom{10}{k} (0,6)^k (0,4)^{10-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

a) Ningún mensaje tiene emoticono (3 puntos)

Se pide $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,6)^0 (0,4)^{10} = (0,4)^{10} = \frac{1024}{9\,765\,625}$$

$$P(X = 0) = \frac{1024}{9\,765\,625} \approx 0,0001$$

b) Exactamente 4 de los 10 mensajes tienen emoticono (3 puntos)

“Dos quintas partes de 10” es $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$. Se pide $P(X = 4)$:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} (0,6)^4 (0,4)^6$$

Calculamos el número combinatorio:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Y sustituimos:

$$P(X = 4) = 210 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^6 = 210 \cdot \frac{1296}{10000} \cdot \frac{4096}{1000000} = \frac{217\,728}{1\,953\,125}$$

$$P(X = 4) = \frac{217\,728}{1\,953\,125} \approx 0,1115$$

c) Ocho o más mensajes tienen emoticono (4 puntos)

Se pide $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$. Calculamos cada término:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} (0,6)^8 (0,4)^2 = 45 \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 = \frac{236\,196}{1\,953\,125} \approx 0,1209$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} (0,6)^9 (0,4)^1 = 10 \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4) = \frac{78\,732}{1\,953\,125} \approx 0,0403$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} (0,6)^{10} = (0,6)^{10} = \frac{59\,049}{9\,765\,625} \approx 0,0060$$

Sumando las tres probabilidades (reduciendo todas a denominador común 9 765 625):

$$P(X \geq 8) = \frac{1\,180\,980}{9\,765\,625} + \frac{393\,660}{9\,765\,625} + \frac{59\,049}{9\,765\,625} = \frac{1\,633\,689}{9\,765\,625}$$

$P(X \geq 8) = \frac{1\,633\,689}{9\,765\,625} \approx 0,1673$
--

(Todos los valores de este problema se han calculado y comprobado con sympy usando fracciones exactas, y se han redondeado a 4 cifras decimales tal como pide el enunciado.)