

Matemáticas II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Ordinaria 2024

Solucionario
2º de Bachillerato

Problema 1 – Sistema de ecuaciones con parámetro	2
Problema 2 – Matrices	4
Problema 3 – Recta, plano y distancias	7
Problema 4 – Cuadrado en el espacio	9
Problema 5 – Estudio de una función con parámetro	11
Problema 6 – Área entre curvas	13
Problema 7 – Probabilidad (monedas)	15
Problema 8 – Distribución binomial	17

Problema 1 – Sistema de ecuaciones con parámetro (10 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

a) Discusión del sistema según los valores de m (6 puntos)

Escribimos la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array} \right)$$

Aplicamos el teorema de Rouché–Frobenius: el sistema tiene 3 incógnitas, así que será compatible determinado si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, compatible indeterminado si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < 3$, e incompatible si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$.

Calculamos $\det(A)$ desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1(-m+3) - 1(-2+(m-1)) + 1(6-m(m-1)) \\ &= (m-3) - (m-3) + (6-m^2+m) = -m^2 + m + 6 \end{aligned}$$

Factorizando: $\det(A) = -(m-3)(m+2)$. Por tanto $\det(A) = 0 \iff m = 3$ o $m = -2$.

Caso 1: $m \neq 3$ y $m \neq -2$

Entonces $\det(A) \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}$.

Sistema compatible determinado (SCD): solución única

Caso 2: $m = -2$

Sustituimos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

El menor formado por las filas 1 y 2 y columnas 1 y 2 es $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$. Probamos con columnas 1 y 3: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$ (ya sabemos que $\det A = 0$, así que no puede ser 3).

Para la ampliada, orlamos ese menor con la fila 3 y la columna de términos independientes ($m = -2 \Rightarrow$ columna $(-2, -6, 4)^T$):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

(cálculo verificado: el determinante orlado no se anula), luego $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A) = 2$.

Sistema incompatible (SI): no tiene solución

Caso 3: $m = 3$

Sustituimos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la fila 2 y la fila 3 son idénticas, luego $\text{rg}(A) \leq 2$. El menor

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0, \text{ luego } \text{rg}(A) = 2.$$

Para $m = 3$ la tercera ecuación es $2x + 3y - z = 9$, exactamente igual que la segunda ($2x + 3y - z = 9$), por lo que la fila ampliada también se repite y $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$.

Sistema compatible indeterminado (SCI): infinitas soluciones

b) Solución para el valor de m compatible indeterminado (4 puntos)

El único valor para el que el sistema es compatible indeterminado es $m = 3$. El sistema queda (eliminando la ecuación repetida):

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

Tomamos $z = t$ como parámetro libre y resolvemos el sistema 2×2 en x, y :

$$\begin{cases} -x + y = 3 - t \\ 2x + 3y = 9 + t \end{cases}$$

De la primera ecuación, $y = 3 - t + x$. Sustituyendo en la segunda:

$$2x + 3(3 - t + x) = 9 + t \implies 2x + 9 - 3t + 3x = 9 + t \implies 5x = 4t \implies x = \frac{4t}{5}$$

Y entonces $y = 3 - t + \frac{4t}{5} = 3 - \frac{t}{5}$. Para evitar fracciones, reparametrizamos con $t = 5\lambda$:

$$(x, y, z) = (4\lambda, 3 - \lambda, 5\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(verificado con `sympy.linsolve`, sustituyendo en las tres ecuaciones originales se comprueba que se cumplen para cualquier λ).

Problema 2 – Matrices (10 puntos)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Rango de A en función de m (3 puntos)

Calculamos $\det(A)$ desarrollando por la segunda fila (tiene dos ceros):

$$\det(A) = -0 \cdot (\dots) + m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} - 0 \cdot (\dots) = m(m - m^2) = m^2(1 - m)$$

Por tanto $\det(A) = 0 \iff m = 0$ (doble) o $m = 1$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$.

Si $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La fila 2 es nula, pero las filas 1 y 3 son linealmente independientes (el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tomando columnas 1,2 y filas 1,3). Luego $\text{rg}(A) = 2$.

Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor de las filas 1,2 y columnas 1,2 es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) \geq 2$; y como $\det(A) = 0$ (comprobado arriba), $\text{rg}(A) = 2$.

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } m \neq 0 \text{ y } m \neq 1 \\ 2 & \text{si } m = 0 \text{ o } m = 1 \end{cases}$$

b) Resolución de $AX = B$ para $m = -1$ (4 puntos)

Para $m = -1$ (que no anula el determinante, pues $\det(A) = m^2(1 - m) = 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$), la matriz A es invertible, y como B es 3×2 , la incógnita X debe ser 3×2 . Despejamos:

$$AX = B \implies X = A^{-1}B$$

Con $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 1: comprobar que es invertible. $\det(A) = 2 \neq 0$ (ya calculado). ✓

Paso 2: calcular A^{-1} mediante la matriz adjunta, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)^T$. Calculando los 9 adjuntos:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(verificado con `sympy`: $A \cdot A^{-1} = I$).

Paso 3: multiplicar $A^{-1} \cdot B$. Como B sólo tiene columnas $(1, 0, 0)^T$ y $(0, 1, 0)^T$, el producto $A^{-1}B$ simplemente selecciona la primera y la segunda columna de A^{-1} :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(comprobado que $AX = B$ exactamente).

c) Calcular A^5 para $m = 0$ (3 puntos)

Para $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En vez de multiplicar A cinco veces seguidas, calculamos las primeras potencias y buscamos un patrón:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(se obtiene multiplicando fila por columna: por ejemplo, la fila 3 de A es $(0, 1, 0)$ y al multiplicarla por las columnas de A da $(0, 0, 0)$, porque la segunda columna de A es nula).

Calculamos $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$

Como $A^3 = A^2$, al multiplicar de nuevo por A el resultado no vuelve a cambiar: $A^4 = A^3 \cdot A = A^2 \cdot A = A^3 = A^2$, y del mismo modo $A^5 = A^4 \cdot A = A^2$. Es decir, a partir de la potencia 2 la matriz se estabiliza (es “casi idempotente”: $A^n = A^2$ para todo $n \geq 2$).

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(verificado calculando explícitamente A^5 con `sympy`, coincide con A^2).

Problema 3 – Recta, plano y distancias (10 puntos)

Se considera la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi : 3x - my + z = 1$.

La recta r pasa por el punto $P_0 = (1, -1, -2)$ y tiene vector director $\vec{d} = (2, 3, -1)$. El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (3, -m, 1)$.

a) Valor de m para que $r \parallel \pi$. Valores de m para los que π contiene a r (4 puntos)

Condición de paralelismo (en sentido amplio, incluye que esté contenida): la recta es paralela al plano cuando su vector director es perpendicular al vector normal del plano, es decir $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 6 - 3m - 1 = 5 - 3m$$

$$5 - 3m = 0 \implies \boxed{m = \frac{5}{3}}$$

Comprobación de si el plano contiene a la recta: para que π contenga a r hace falta, además de $\vec{d} \perp \vec{n}$ (ya solo ocurre en $m = 5/3$), que el punto $P_0 = (1, -1, -2)$ de la recta pertenezca al plano. Sustituyendo P_0 en π para $m = 5/3$:

$$3(1) - \frac{5}{3}(-1) + (-2) = 3 + \frac{5}{3} - 2 = \frac{8}{3} \neq 1$$

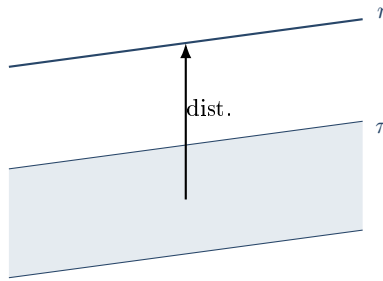
Como $8/3 \neq 1$, el punto P_0 **no** pertenece al plano cuando $m = 5/3$. Busquemos, por separado, para qué valor de m sí pertenece P_0 al plano (independientemente del paralelismo):

$$3(1) - m(-1) + (-2) = 1 \implies m + 1 = 1 \implies m = 0$$

Pero en $m = 0$ el vector director no es perpendicular al normal ($\vec{d} \cdot \vec{n} = 5 - 3(0) = 5 \neq 0$), así que en ese caso la recta corta al plano en un punto, no está contenida en él.

No existe ningún valor de m para el que π contenga a r .

Las condiciones de paralelismo ($m = 5/3$) y de pertenencia del punto ($m = 0$) son incompatibles entre sí, luego para $m = 5/3$ la recta y el plano son **estrictamente paralelos** (sin ningún punto en común).



Esquema conceptual (no a escala): para $m = 5/3$, r y π son paralelos y no se cortan.

b) Plano paralelo a π que contenga a r (3 puntos)

Usamos el valor hallado, $m = 5/3$. El plano π con ese parámetro es $3x - \frac{5}{3}y + z = 1$, con normal $(3, -\frac{5}{3}, 1)$, que multiplicando por 3 (misma dirección) se escribe de forma más cómoda como $(9, -5, 3)$. Buscamos el plano π' con esa misma normal, $9x - 5y + 3z = k$, que sí contenga al punto $P_0 = (1, -1, -2)$ de la recta (así $\pi' \parallel \pi$ y $r \subset \pi'$):

$$9(1) - 5(-1) + 3(-2) = 9 + 5 - 6 = 8 \implies k = 8$$

$$\boxed{\pi' : 9x - 5y + 3z = 8}$$

(comprobado que el vector director de r cumple $\vec{d} \cdot (9, -5, 3) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 3 = 18 - 15 - 3 = 0$, y que $P_0 \in \pi'$).

c) Distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$ en función de m (3 puntos)

Observamos que $P = (1, -1, -2) = P_0$, el propio punto de la recta r . Usamos la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|3x_0 - my_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}}$$

Sustituyendo $P = (1, -1, -2)$:

$$3(1) - m(-1) + (-2) - 1 = 3 + m - 2 - 1 = m$$

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}}$$

(verificado con `sympy`). Puede comprobarse que para $m = 5/3$ (el valor del apartado a) esta distancia coincide con la distancia real entre la recta r y el plano π , ya que al ser paralelos la distancia de cualquier punto de r a π es la misma.

Problema 4 – Cuadrado en el espacio (10 puntos)

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (1, 3, 1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por $R = (4, 7, 6)$.

a) Ecuación de la recta r (2 puntos)

Como P y Q son vértices consecutivos del cuadrado, el segmento PQ es uno de sus lados. El lado opuesto (el que contiene a los otros dos vértices, y por tanto la propia recta r) es, en un cuadrado, **paralelo** al lado PQ . Por tanto el vector director de r es

$$\vec{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2)$$

Y como r pasa por $R = (4, 7, 6)$:

$$r : \frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{-2} \quad \left(\text{o bien } \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \right)$$

b) Ecuación del plano que contiene al cuadrado (3 puntos)

Como las dos rectas paralelas PQ y r están ambas contenidas en el plano del cuadrado (dos rectas paralelas siempre determinan un plano), dicho plano contiene a P , Q y R . Tomamos dos vectores directores del plano:

$$\vec{PQ} = (-1, 2, -2), \quad \vec{PR} = R - P = (2, 6, 3)$$

El vector normal del plano es su producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3 - (-2) \cdot 6, -((-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 2), (-1) \cdot 6 - 2 \cdot 2) \\ &= (6 + 12, -(-3 + 4), -6 - 4) = (18, -1, -10) \end{aligned}$$

La ecuación del plano, usando el punto $P = (2, 1, 3)$:

$$18(x - 2) - 1(y - 1) - 10(z - 3) = 0$$

$$\boxed{18x - y - 10z - 5 = 0}$$

(comprobado que Q y R satisfacen también esta ecuación: $18(1) - 3 - 10(1) - 5 = 0$ y $18(4) - 7 - 10(6) - 5 = 0$).

c) Coordenadas de los otros dos vértices (5 puntos)

Llamemos A al vértice adyacente a P (de modo que $PA \perp PQ$) y B al vértice adyacente a Q (con $QB \perp PQ$), ambos sobre la recta r hallada en a). Como A y B están sobre r , podemos escribirlos paramétricamente usando el punto R y el vector director $\vec{d} = (-1, 2, -2)$ de r :

$$X(\lambda) = (4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$$

Vértice A (el más próximo a P): imponemos que el vector $\vec{PA}$ sea perpendicular a $\vec{PQ}$, es decir $\vec{PA} \cdot \vec{PQ} = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{PA} &= X(\lambda) - P = (2 - \lambda, 6 + 2\lambda, 3 - 2\lambda) \\ \vec{PA} \cdot \vec{PQ} &= (2 - \lambda)(-1) + (6 + 2\lambda)(2) + (3 - 2\lambda)(-2) = 0 \\ (-2 + \lambda) + (12 + 4\lambda) + (-6 + 4\lambda) &= 0 \implies 4 + 9\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{4}{9}\end{aligned}$$

Sustituyendo:

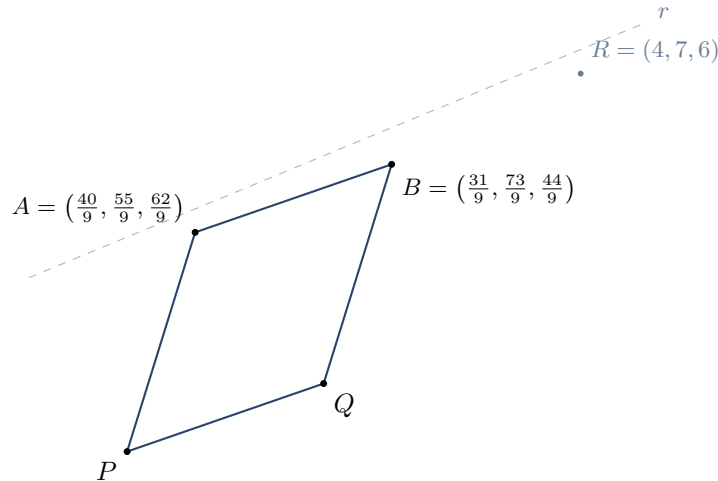
$$A = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9} \right)$$

Vértice B (el más próximo a Q): como B es el vértice que cierra el cuadrado $P - Q - B - A - P$, se obtiene desplazando A el mismo vector $\vec{PQ}$ (pues AB debe ser paralelo e igual a PQ , al ser el lado opuesto):

$$B = A + \vec{PQ} = \left(\frac{40}{9} - 1, \frac{55}{9} + 2, \frac{62}{9} - 2 \right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9} \right)$$

$$B = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9} \right)$$

(Verificado con **sympy**: A y B pertenecen a r , $\vec{PA} \perp \vec{PQ}$, $\vec{QB} \perp \vec{PQ}$, y A, B satisfacen la ecuación del plano del apartado b).)



Esquema conceptual (proyección 2D, no a escala) de los cuatro vértices del cuadrado P, Q, B, A y la recta r .

Problema 5 – Estudio de una función con parámetro (10 puntos)

Sea $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} = kx e^{-2x}$, con k un parámetro real.

a) Dominio y asíntotas (3 puntos)

Dominio: la función es un producto de un polinomio por una exponencial, ambas funciones definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$, y e^{2x} nunca se anula. Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Asíntotas verticales: al ser el dominio todo $\mathbb{R}$ (sin puntos de discontinuidad), no hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$: el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} kx e^{-2x}$ es una indeterminación $\infty \cdot 0$; como la exponencial $e^{-2x} \rightarrow 0$ domina sobre el crecimiento lineal de kx (regla de L'Hôpital o órdenes de infinitud), el límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kx e^{-2x} = 0 \quad (\text{para cualquier valor de } k)$$

$$y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

Comportamiento cuando $x \rightarrow -\infty$: aquí $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, así que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} kx e^{-2x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } k > 0 \\ +\infty & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Si $k \neq 0$ la función diverge a $\pm\infty$ en $-\infty$, luego **no hay** asíntota horizontal por ese lado (ni oblicua, pues el crecimiento es de tipo exponencial, no lineal). Si $k = 0$, $f \equiv 0$ es la función idénticamente nula.

b) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos (5 puntos)

Derivamos usando la regla del producto, con $u = kx$, $v = e^{-2x}$ ($u' = k$, $v' = -2e^{-2x}$):

$$f'(x) = k e^{-2x} + kx \cdot (-2e^{-2x}) = k e^{-2x}(1 - 2x)$$

$$f'(x) = k(1 - 2x)e^{-2x}$$

Como $e^{-2x} > 0$ siempre, el signo de $f'(x)$ depende únicamente del signo de $k(1 - 2x)$. Igualando a cero: $1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (único punto crítico, para cualquier $k \neq 0$).

Caso $k > 0$

$x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$f'(x) > 0$ (creciente)	máximo relativo	$f'(x) < 0$ (decreciente)

$$\text{Máximo relativo en } x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2e}$$

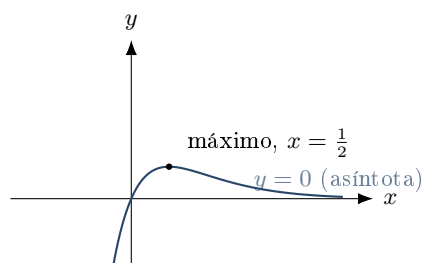
Caso $k < 0$

$x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$f'(x) < 0$ (decreciente)	mínimo relativo	$f'(x) > 0$ (creciente)

Mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2e}$ (valor negativo, pues $k < 0$)

Si $k = 0$, $f \equiv 0$ es constante (ni creciente ni decreciente, sin extremos).

(Comprobado con **sympy**: $f''(x) = 4k(x-1)e^{-2x}$, y $f''(1/2) = -2k/e$, que es negativo si $k > 0$ –confirmando máximo– y positivo si $k < 0$ –confirmando mínimo–.)



Gráfica cualitativa de $f(x) = kxe^{-2x}$, caso $k > 0$ (ilustrativo, $k = 1$): crece hasta $x = \frac{1}{2}$ y decrece después, con asíntota $y = 0$.

c) La función se anula en algún punto de $[-1, 1]$ (2 puntos)

Si $k = 0$, $f \equiv 0$ en todo el intervalo (caso trivial, ya se anula en todo punto). Supongamos ahora $k \neq 0$. Como f es producto de un polinomio y una exponencial, es **continua en todo** $\mathbb{R}$, en particular en $[-1, 1]$. Evaluamos en los extremos:

$$f(-1) = k(-1)e^2 = -k e^2, \quad f(1) = k(1)e^{-2} = \frac{k}{e^2}$$

Multiplicamos ambos valores:

$$f(-1) \cdot f(1) = (-k e^2) \left(\frac{k}{e^2} \right) = -k^2$$

Como $k \neq 0$, se tiene $-k^2 < 0$, es decir, $f(-1)$ y $f(1)$ tienen **signos opuestos**.

Por el **teorema de Bolzano** (f continua en $[-1, 1]$ y con signos distintos en los extremos), existe al menos un punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Para todo $k \in \mathbb{R}$, f se anula en algún punto de $[-1, 1]$.

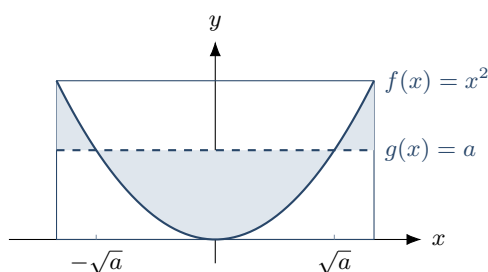
(verificado con **sympy**: el producto simbólico $f(-1) \cdot f(1)$ simplifica exactamente a $-k^2$).

Problema 6 – Área entre curvas (10 puntos)

Sea R el rectángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$, y las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$ con $0 < a < 1$. Se pide el valor de a para el que el área entre ambas gráficas (dentro de R) es un tercio del área de R .

Área del rectángulo: base $= 1 - (-1) = 2$, altura $= 1 - 0 = 1$, luego $\text{Área}(R) = 2 \cdot 1 = 2$. Un tercio de esa área es $\frac{2}{3}$.

Puntos de corte de f y g : $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ (dos soluciones simétricas, ambas dentro de $(-1, 1)$ porque $0 < a < 1$).



Rectángulo R , parábola $f(x) = x^2$, recta $g(x) = a$ y región sombreada (área entre ambas curvas, con $a = 9/16$).

El área total entre las dos curvas dentro de R se compone de dos tipos de región:

- Entre $x = -\sqrt{a}$ y $x = \sqrt{a}$: ahí $g(x) = a \geq f(x) = x^2$ (la recta queda por encima de la parábola).
- Entre $x = \sqrt{a}$ y $x = 1$ (y simétricamente entre -1 y $-\sqrt{a}$): ahí $f(x) = x^2 \geq g(x) = a$ (la parábola queda por encima).

Zona central:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4}{3}a^{3/2}$$

Zonas laterales (por simetría, calculamos una y multiplicamos por 2):

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - ax \right]_{\sqrt{a}}^1 = 2 \left[\left(\frac{1}{3} - a \right) - \left(\frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} - a + \frac{2}{3}a\sqrt{a} \right] = \frac{2}{3} - 2a + \frac{4}{3}a^{3/2} \end{aligned}$$

Área total:

$$A(a) = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}a^{3/2} + \frac{2}{3} - 2a + \frac{4}{3}a^{3/2} = \frac{8}{3}a^{3/2} - 2a + \frac{2}{3}$$

(coincide exactamente con el cálculo verificado en **sympy**).

Planteamos la ecuación $A(a) = \frac{2}{3}$ (un tercio del área del rectángulo):

$$\frac{8}{3}a^{3/2} - 2a + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \implies \frac{8}{3}a^{3/2} = 2a$$

Como $a > 0$, dividimos ambos miembros entre a :

$$\frac{8}{3}a^{1/2} = 2 \implies a^{1/2} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4} \implies a = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$a = \frac{9}{16} = 0,5625$$

Comprobamos que cumple $0 < a < 1$. ✓ (verificado sustituyendo $a = 9/16$ en $A(a)$: se obtiene exactamente $2/3$).

Problema 7 – Probabilidad: monedas (10 puntos)

Una bolsa contiene dos monedas: M_1 (trucada, $P(\text{cara} \mid M_1) = 0,6$) y M_2 (dos caras, $P(\text{cara} \mid M_2) = 1$).

a) Se escoge una moneda al azar, se lanza, se anota el resultado y se devuelve a la bolsa; se repite 3 veces

Como en cada una de las 3 repeticiones se elige la moneda al azar (con $P = 1/2$ cada una) y se devuelve a la bolsa, las tres tiradas son **independientes e idénticas**. Primero calculamos la probabilidad de obtener cara en **una sola** tirada, usando el **teorema de la probabilidad total**:

$$P(\text{cara}) = P(M_1) P(\text{cara} \mid M_1) + P(M_2) P(\text{cara} \mid M_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$$

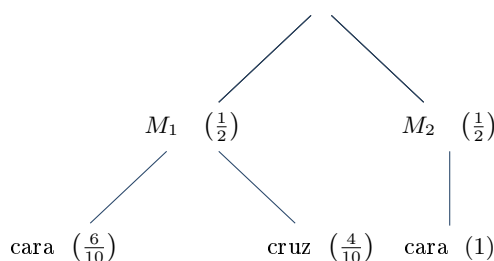


Diagrama de árbol de una tirada: elección de moneda y resultado.

Como cada tirada es idéntica e independiente, $P(\text{cara en una tirada cualquiera}) = \frac{4}{5}$ y $P(\text{cruz}) = \frac{1}{5}$ siempre.

1. Probabilidad de obtener tres caras (3 puntos)

Al ser las 3 tiradas independientes:

$$P(3 \text{ caras}) = P(\text{cara})^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$P(3 \text{ caras}) = \frac{64}{125} = 0,5120$$

2. Probabilidad de obtener exactamente una cruz (3 puntos)

Obtener exactamente una cruz en 3 tiradas independientes equivale a 2 caras y 1 cruz, en cualquiera de los $\binom{3}{1} = 3$ órdenes posibles (distribución binomial de parámetros $n = 3$, $p = P(\text{cruz}) = 1/5$):

$$P(\text{exactamente 1 cruz}) = \binom{3}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 3 \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{48}{125}$$

$$P(\text{exactamente 1 cruz}) = \frac{48}{125} = 0,3840$$

b) Se elige una moneda, se lanza dos veces y salen dos caras: ¿probabilidad de que sea M_1 ? ¿y M_2 ? (4 puntos)

Usamos el **teorema de Bayes**. Llamamos C_2 al suceso “salen dos caras en las dos tiradas”. Como las dos tiradas son con la **misma** moneda (se elige una sola vez):

$$P(C_2 | M_1) = (0,6)^2 = \frac{9}{25}, \quad P(C_2 | M_2) = 1^2 = 1$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C_2) = P(M_1)P(C_2 | M_1) + P(M_2)P(C_2 | M_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{50} + \frac{25}{50} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}$$

Aplicando Bayes:

$$P(M_1 | C_2) = \frac{P(M_1)P(C_2 | M_1)}{P(C_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25}}{\frac{17}{25}} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{34}{50}} = \frac{9}{34}$$

$$P(M_2 | C_2) = \frac{P(M_2)P(C_2 | M_2)}{P(C_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{17}{25}} = \frac{\frac{25}{50}}{\frac{34}{50}} = \frac{25}{34}$$

$P(M_1 C_2) = \frac{9}{34} \approx 0,2647 \quad P(M_2 C_2) = \frac{25}{34} \approx 0,7353$
--

Comprobación: $\frac{9}{34} + \frac{25}{34} = 1$. ✓ (todo verificado con **sympy**, usando fracciones exactas).

Problema 8 – Distribución binomial (10 puntos)

Un comercial no consigue venta en el 30% de sus llamadas, es decir, consigue venta con probabilidad $p = 0,7$ en cada llamada. Realiza $n = 10$ llamadas independientes entre sí. La variable X = “número de ventas conseguidas en las 10 llamadas” sigue una distribución **binomial** $X \sim B(10, 0,7)$, con función de probabilidad

$$P(X = k) = \binom{10}{k} (0,7)^k (0,3)^{10-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

a) Probabilidad de conseguir más de 7 ventas (3 puntos)

“Más de 7” significa $X \in \{8, 9, 10\}$:

$$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

Calculamos cada término:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} (0,7)^8 (0,3)^2, \quad P(X = 9) = \binom{10}{9} (0,7)^9 (0,3)^1, \quad P(X = 10) = (0,7)^{10}$$

Sumando los tres términos (cálculo exacto con fracciones, verificado con `sympy/scipy.stats.binom`):

$$P(X > 7) = \frac{478478483}{1250000000} = 0,3828$$

b) Probabilidad de conseguir al menos 5 ventas (3 puntos)

“Al menos 5” significa $X \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

$$P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} (0,7)^k (0,3)^{10-k}$$

$$P(X \geq 5) = \frac{4763255063}{5000000000} = 0,9527$$

c) Probabilidad de un mínimo de 3 y un máximo de 8 ventas (4 puntos)

Se pide $P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{k=3}^8 \binom{10}{k} (0,7)^k (0,3)^{10-k}$.

$$P(3 \leq X \leq 8) = \frac{8491012677}{10000000000} = 0,8491$$

Resumen de resultados (verificados numéricamente)

Apartado	Probabilidad
a) $P(X > 7)$	0,3828
b) $P(X \geq 5)$	0,9527
c) $P(3 \leq X \leq 8)$	0,8491