

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Ordinaria 2024

Solucionario
2º de Bachillerato

Problema 1 – Sistema de ecuaciones: venta de televisores	2
Problema 2 – Ecuaciones matriciales	4
Problema 3 – Estudio y representación de una función racional	6
Problema 4 – Función definida a trozos: continuidad, extremos y área	9
Problema 5 – Probabilidad condicionada y teorema de Bayes	12
Problema 6 – Experimento compuesto: dado y moneda	14

Problema 1 – Sistema de ecuaciones: venta de televisores (10 puntos)

Enunciado. Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD. Un televisor del modelo ULED cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo ULED, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Planteamiento

Llamamos:

- x : número de televisores ULED vendidos.
- y : número de televisores QLED vendidos.
- z : número de televisores LD vendidos.

El precio de cada modelo es:

- ULED: 1 250 €.
- QLED (un 10% más barato): $1\,250 \cdot 0,9 = 1\,125$ €.
- LD (un 20% más barato): $1\,250 \cdot 0,8 = 1\,000$ €.

Con los datos del enunciado planteamos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

1. Total de televisores vendidos: $x + y + z = 220$.
2. Ingresos totales: $1\,250x + 1\,125y + 1\,000z = 247\,250$.
3. Relación entre modelos: $y + z = 3x$.

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ y + z = 3x \end{cases}$$

Resolución

De la tercera ecuación, $y + z = 3x$. Sustituyendo en la primera:

$$x + 3x = 220 \implies 4x = 220 \implies x = 55.$$

Por tanto $y + z = 3 \cdot 55 = 165$, es decir $z = 165 - y$.

Sustituimos $x = 55$ y $z = 165 - y$ en la segunda ecuación:

$$1250 \cdot 55 + 1125y + 1000(165 - y) = 247250$$

$$68750 + 1125y + 165000 - 1000y = 247250$$

$$125y + 233750 = 247250 \implies 125y = 13500 \implies y = 108.$$

Finalmente,

$$z = 165 - 108 = 57.$$

Comprobación: $x + y + z = 55 + 108 + 57 = 220$ (televisores correctos) y

$$1250 \cdot 55 + 1125 \cdot 108 + 1000 \cdot 57 = 68750 + 121500 + 57000 = 247250 \text{ € } \checkmark$$

$$x = 55 \text{ ULED}, \quad y = 108 \text{ QLED}, \quad z = 57 \text{ LD}$$

Problema 2 – Ecuaciones matriciales (10 puntos)

Enunciado. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Matriz X tal que $X^{-1}A + A = B$ (4 puntos)

Despejamos X^{-1} :

$$X^{-1}A = B - A \implies X^{-1} = (B - A)A^{-1}.$$

Tomando inversas en ambos miembros (recordando que $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$):

$$X = [(B - A)A^{-1}]^{-1} = A(B - A)^{-1}.$$

Calculamos primero A^{-1} . Como $A = I - E$ con E la matriz con un 1 en la posición $(1,3)$ y ceros en el resto, se comprueba directamente que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(en efecto, $A \cdot A^{-1} = I$).

Calculamos $B - A$:

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es invertible ($\det(B - A) = 1 \neq 0$), y su inversa es

$$(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X = A(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Matriz Y tal que $(A - B)Y - AY = I$ (4 puntos)

Sacamos factor común Y a la izquierda:

$$(A - B)Y - AY = (A - B - A)Y = -BY = I.$$

Por tanto,

$$Y = -B^{-1}.$$

Calculamos B^{-1} . Como $\det B = 1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 1 + 1 = 2 \neq 0$, B es invertible, y resulta

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$Y = -B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Matriz Z tal que $AZA^{-1} = I$ (2 puntos)

Multiplicamos a la izquierda por A^{-1} y a la derecha por A :

$$A^{-1}(AZA^{-1})A = A^{-1}IA \implies Z = A^{-1}A = I.$$

(No hace falta ni siquiera conocer explícitamente A : cualquier matriz invertible A que conjuga a la identidad deja la identidad fija.)

$$Z = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 – Estudio y representación de una función racional (10 puntos)

Enunciado. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x - 3) + (x + 1)}.$$

Simplificación previa. Desarrollamos el denominador:

$$x(x - 3) + (x + 1) = x^2 - 3x + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Y el numerador ya está factorizado: $x^2 - 3x = x(x - 3)$. Por tanto, la expresión más simple con la que trabajaremos es

$$f(x) = \frac{x(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

(El numerador y el denominador no comparten raíces, así que esta es ya la fracción irreducible.)

a) Dominio y puntos de corte (2 puntos)

Dominio. La función no existe donde se anula el denominador:

$$(x - 1)^2 = 0 \implies x = 1.$$

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

Corte con el eje OX ($f(x) = 0$): se anula el numerador, $x(x - 3) = 0$, es decir $x = 0$ o $x = 3$ (ninguno coincide con $x = 1$, así que ambos son válidos):

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (3, 0).$$

Corte con el eje OY ($x = 0$): $f(0) = \frac{0 \cdot (-3)}{(-1)^2} = 0$, luego el punto es $(0, 0)$ (coincide con uno de los cortes anteriores).

b) Asíntotas (2 puntos)

Asíntota vertical. En $x = 1$ el denominador se anula y el numerador no ($1 \cdot (1 - 3) = -2 \neq 0$), así que $x = 1$ es asíntota vertical. Como $(x - 1)^2 > 0$ a ambos lados de $x = 1$, y el numerador vale -2 cerca de $x = 1$, el signo del cociente es negativo en ambos lados:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

$$\boxed{x = 1 \text{ es asíntota vertical (la función tiende a } -\infty \text{ por ambos lados)}}$$

Asíntota horizontal. El numerador y el denominador tienen el mismo grado (grado 2), así que el límite en el infinito es el cociente de los coeficientes directores (ambos iguales a 1):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = 1.$$

$$y = 1 \text{ es asíntota horizontal (en ambas ramas)}$$

Para situar la curva respecto a la asíntota, estudiamos el signo de $f(x) - 1$:

$$f(x) - 1 = \frac{x(x-3) - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 3x - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Como $(x-1)^2 > 0$ siempre, el signo de $f(x) - 1$ coincide con el signo de $-(x+1)$: es positivo si $x < -1$ (la curva queda por *encima* de la asíntota) y negativo si $x > -1$, $x \neq 1$ (la curva queda por *debajo*).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 puntos)

Derivamos $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}.$$

Sacando factor común $(x-1)$ en el numerador y simplificando:

$$f'(x) = \frac{(x-1)[(2x-3)(x-1) - 2(x^2-3x)]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-3)(x-1) - 2(x^2-3x)}{(x-1)^3}.$$

Desarrollando el numerador:

$$\begin{aligned}(2x-3)(x-1) &= 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x^2 - 5x + 3, \\ 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 6x &= x + 3.\end{aligned}$$

Así pues,

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3}$$

El numerador se anula en $x = -3$, y el denominador cambia de signo en $x = 1$ (no es punto del dominio). Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los tres intervalos que determinan $x = -3$ y $x = 1$:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
signo de $x+3$	-	+	+
signo de $(x-1)^3$	-	-	+
signo de $f'(x)$	+	-	+
f	creciente	decreciente	creciente

$$\text{Creciente en } (-\infty, -3) \cup (1, +\infty), \quad \text{Decreciente en } (-3, 1)$$

d) Máximos y mínimos locales (2 puntos)

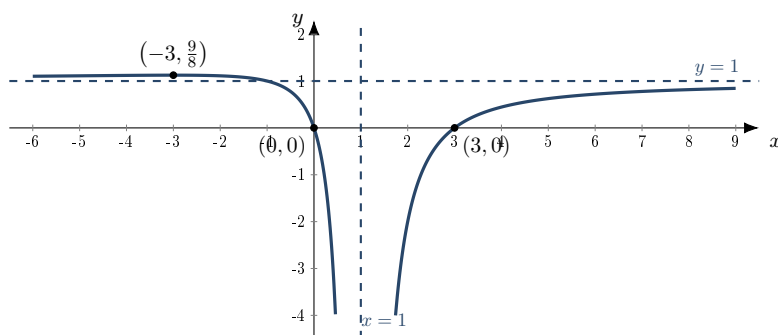
El único punto donde f' cambia de signo dentro del dominio es $x = -3$ (en $x = 1$ la función ni siquiera está definida, así que no puede haber extremo ahí). Como f' pasa de positiva a negativa en $x = -3$, se trata de un **máximo local**.

$$f(-3) = \frac{(-3)(-3-3)}{(-3-1)^2} = \frac{(-3)(-6)}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

Máximo local en $(-3, \frac{9}{8})$. No hay mínimo local.
--

e) Representación gráfica (2 puntos)

Reunimos toda la información: dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; cortes en $(0,0)$ y $(3,0)$; asíntota vertical $x = 1$ (la curva tiende a $-\infty$ por ambos lados); asíntota horizontal $y = 1$ (por encima para $x < -1$, por debajo para $x > -1, x \neq 1$); creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-3, 1)$; máximo local en $(-3, \frac{9}{8})$.



Problema 4 – Función definida a trozos: continuidad, extremos y área (10 puntos)

Enunciado. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Valor de a para que f sea continua (2 puntos)

Las dos ramas son polinomios, por lo que son continuas en todo su dominio; el único punto conflictivo es $x = -1$, donde cambia la definición. Para que f sea continua en $x = -1$ necesitamos que el límite por la izquierda coincida con el límite por la derecha (y con el valor de la función, que viene dado por la primera rama ya que ésta incluye $x = -1$):

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1 - 1)^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Igualando:

$$a - 25 = 7 \implies a = 32.$$

$$\boxed{a = 32}$$

b) Con $a = 9$, máximos y mínimos locales en $(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2})$ (4 puntos)

Observamos que todo el intervalo $(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}) = (-4,5, -1,5)$ cumple $x \leq -1$, así que en él trabajamos únicamente con la primera rama, ahora con $a = 9$:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x.$$

Derivamos:

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 = 3(x^2 + 6x + 8) = 3(x+2)(x+4).$$

Las raíces de f' son $x = -4$ y $x = -2$, ambas dentro del intervalo $(-4,5, -1,5)$ pedido. Estudiamos el signo de $f'(x) = 3(x+2)(x+4)$:

	$(-4,5, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, -1,5)$
signo de $f'(x)$	+	-	+
f	creciente	decreciente	creciente

Por tanto $x = -4$ es un máximo local y $x = -2$ es un mínimo local. Calculamos los valores:

$$f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -64 + 144 - 96 = -16.$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -8 + 36 - 48 = -20.$$

Máximo local en $(-4, -16)$ Mínimo local en $(-2, -20)$

c) Con $a = 0$, área entre f , las rectas $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX (4 puntos)

Como 2 y 3 son ambos mayores que -1 , en todo el intervalo $[2, 3]$ se utiliza únicamente la segunda rama de la función (que no depende de a):

$$f(x) = (x - 1)^2 + 3, \quad x \in [2, 3].$$

Antes de integrar comprobamos el signo de f en $[2, 3]$: como $(x - 1)^2 \geq 0$, se tiene $f(x) \geq 3 > 0$ para todo x de este intervalo. La función no corta al eje OX en $[2, 3]$, así que el área buscada es directamente la integral definida (sin necesidad de separar en tramos de distinto signo):

$$\text{Área} = \int_2^3 [(x - 1)^2 + 3] dx.$$

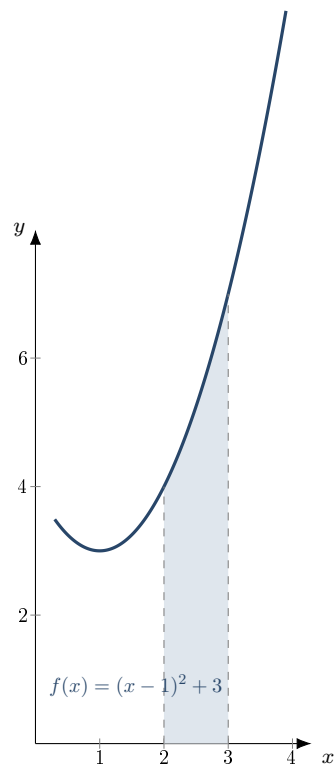
Calculamos una primitiva:

$$\int [(x - 1)^2 + 3] dx = \frac{(x - 1)^3}{3} + 3x + C.$$

Evaluamos entre 2 y 3:

$$\left[\frac{(x - 1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 = \left(\frac{2^3}{3} + 9 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 6 \right) = \left(\frac{8}{3} + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 6 \right) = \frac{35}{3} - \frac{19}{3} = \frac{16}{3}.$$

$\text{Área} = \frac{16}{3} \text{ unidades cuadradas } (\approx 5,33 \text{ u}^2)$



Problema 5 – Probabilidad condicionada y teorema de Bayes (10 puntos)

Enunciado. Un 30% de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40% de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40% sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

Llamamos I al suceso “sabe inglés” y Al al suceso “sabe alemán”. Los datos del enunciado son:

$$P(I \cap Al) = 0,30, \quad P(I) = 0,40, \quad P(I | Al) = 0,40.$$

a) Probabilidad de que sepa alemán (3 puntos)

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(I | Al) = \frac{P(I \cap Al)}{P(Al)} \implies 0,40 = \frac{0,30}{P(Al)} \implies P(Al) = \frac{0,30}{0,40} = 0,75.$$

$$\boxed{P(Al) = 0,75 = 75\%}$$

b) Probabilidad de que sepa alemán y no inglés (3 puntos)

El suceso Al se descompone como la unión disjunta de $(Al \text{ y } I)$ y $(Al \text{ y no } I)$, luego

$$P(Al) = P(Al \cap I) + P(Al \cap \bar{I}) \implies P(Al \cap \bar{I}) = P(Al) - P(Al \cap I) = 0,75 - 0,30 = 0,45.$$

$$\boxed{P(Al \cap \bar{I}) = 0,45 = 45\%}$$

c) Si no sabe alemán, probabilidad de que sepa inglés (4 puntos)

$$\text{Necesitamos } P(I | \bar{Al}) = \frac{P(I \cap \bar{Al})}{P(\bar{Al})}.$$

Por un lado, $P(\bar{Al}) = 1 - P(Al) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Por otro, descomponemos I igual que antes: $P(I) = P(I \cap Al) + P(I \cap \bar{Al})$, luego

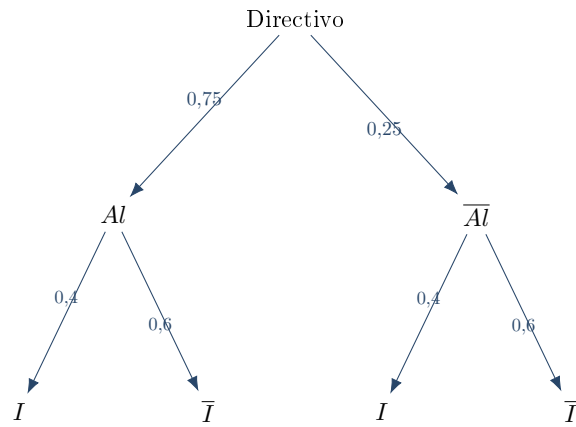
$$P(I \cap \bar{Al}) = P(I) - P(I \cap Al) = 0,40 - 0,30 = 0,10.$$

Por tanto,

$$P(I | \bar{Al}) = \frac{0,10}{0,25} = 0,4.$$

$$\boxed{P(I | \bar{Al}) = 0,4 = 40\%}$$

Diagrama de árbol resumen



A lo largo de cada rama se multiplican las probabilidades: $P(Al \cap I) = 0,75 \cdot 0,4 = 0,30$; $P(Al \cap \bar{I}) = 0,75 \cdot 0,6 = 0,45$; $P(\bar{Al} \cap I) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,10$; $P(\bar{Al} \cap \bar{I}) = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15$. Los cuatro valores suman 1, como debe ser, y coinciden con los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Problema 6 – Experimento compuesto: dado y moneda (10 puntos)

Enunciado. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si obtenemos un número mayor que 2, lanzamos dos veces una moneda bien construida; si obtenemos un número menor o igual que 2, lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es el triple que la de obtener cruz.

Llamamos $D_{>2}$ al suceso “sale un número mayor que 2” y $D_{\leq 2}$ a su contrario. Como hay 4 caras favorables a $D_{>2}$ (3, 4, 5, 6) y 2 a $D_{\leq 2}$ (1, 2):

$$P(D_{>2}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(D_{\leq 2}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

En la moneda defectuosa, si p es la probabilidad de cruz, la de cara es $3p$, y como deben sumar 1: $3p + p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Por tanto, en cada lanzamiento:

$$\text{Moneda normal: } P(C) = \frac{1}{2}, P(X) = \frac{1}{2}. \quad \text{Moneda defectuosa: } P(C) = \frac{3}{4}, P(X) = \frac{1}{4}.$$

a) Si salieron dos caras, probabilidad de que el dado fuera mayor que 2 (3 puntos)

Se pide $P(D_{>2} | CC)$. Primero calculamos, por el teorema de la probabilidad total, $P(CC)$:

$$P(CC | D_{>2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad P(CC | D_{\leq 2}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

$$P(CC) = P(D_{>2})P(CC | D_{>2}) + P(D_{\leq 2})P(CC | D_{\leq 2}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{6} + \frac{3}{16}.$$

Reducimos a denominador común 48: $\frac{1}{6} = \frac{8}{48}$, $\frac{3}{16} = \frac{9}{48}$, luego

$$P(CC) = \frac{8}{48} + \frac{9}{48} = \frac{17}{48}.$$

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(D_{>2} | CC) = \frac{P(D_{>2})P(CC | D_{>2})}{P(CC)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{17}{48}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{48}{17} = \frac{8}{17}.$$

$$P(D_{>2} | CC) = \frac{8}{17} \approx 0,471$$

b) Probabilidad de la unión “ $D_{\leq 2}$ ” y “al menos una cara” (4 puntos)

Sea $A = D_{\leq 2}$ y $B =$ “al menos una cara en los dos lanzamientos”. Queremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ya sabemos $P(A) = \frac{1}{3}$.

Para $P(B)$ usamos el suceso contrario (“ninguna cara”, es decir, dos cruces):

$$P(\bar{B} | D_{>2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B | D_{>2}) = \frac{3}{4},$$

$$P(\overline{B} \mid D_{\leq 2}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow P(B \mid D_{\leq 2}) = \frac{15}{16}.$$

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = \frac{8}{16} + \frac{5}{16} = \frac{13}{16}.$$

Como $A = D_{\leq 2}$ determina completamente qué moneda se lanza, $P(B \mid A) = P(B \mid D_{\leq 2}) = \frac{15}{16}$, así que

$$P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}.$$

Finalmente,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16} = \frac{1}{3} + \frac{8}{16} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(D_{\leq 2} \cup B) = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

c) ¿Son independientes “sacar un 6” y “sacar dos cruces”? (3 puntos)

Sea $S = \{\text{dado} = 6\}$ y $T = \{XX\}$ (dos cruces). Como $S \subset D_{>2}$, condicionado a S el dado únicamente determina que se usa la moneda normal, por lo que

$$P(T \mid S) = P(XX \mid D_{>2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Y como $P(S) = \frac{1}{6}$:

$$P(S \cap T) = P(S) P(T \mid S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Por otro lado, calculamos $P(T)$ por probabilidad total:

$$P(T) = P(D_{>2}) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + P(D_{\leq 2}) \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{8}{48} + \frac{1}{48} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}.$$

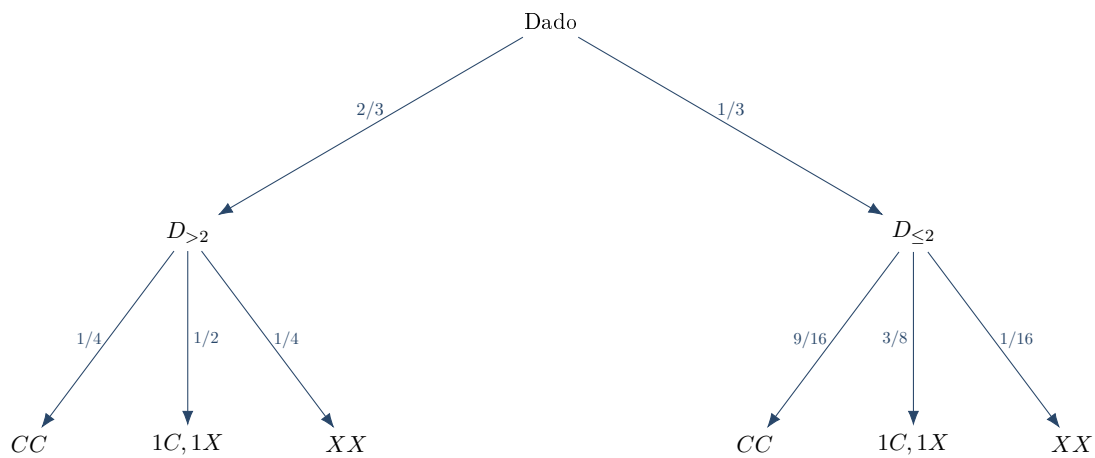
Si S y T fueran independientes debería cumplirse $P(S \cap T) = P(S) \cdot P(T)$:

$$P(S) \cdot P(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}.$$

Comparamos: $P(S \cap T) = \frac{1}{24} \neq \frac{1}{32} = P(S)P(T)$.

No son independientes, ya que $P(S \cap T) = \frac{1}{24} \neq P(S) \cdot P(T) = \frac{1}{32}$

Diagrama de árbol resumen



Donde, en cada rama de moneda, “1C, 1X” agrupa los dos órdenes posibles de obtener una cara y una cruz. Multiplicando las ramas se obtiene, por ejemplo, $P(D_{>2} \cap CC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ y $P(D_{\leq 2} \cap CC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$, cuya suma es $P(CC) = \frac{17}{48}$, tal como se obtuvo en el apartado (a).