

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU Comunidad Valenciana – Convocatoria
Extraordinaria 2024

Solucionario
2º de Bachillerato

Problema 1 – Programación lineal: fabricación de bolígrafos	2
Problema 2 – Matrices	5
Problema 3 – Estudio y representación de una función racional	7
Problema 4 – Optimización: ingresos y beneficios	10
Problema 5 – Probabilidad: sucesos y tabla de contingencia	12
Problema 6 – Probabilidad total y teorema de Bayes	14

Problema 1 – Programación lineal: fabricación de bolígrafos (10 puntos)

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

Planteamiento del problema

Llamamos x al número de bolígrafos sencillos e y al número de bolígrafos sofisticados fabricados cada día.

Restricciones:

- Tinta disponible: cada bolígrafo (de cualquier tipo) gasta 1 unidad de tinta, y hay 2500 unidades:

$$x + y \leq 2500$$

- Plástico disponible: el sencillo gasta 1 unidad y el sofisticado 1,5 unidades, y hay 3000 unidades:

$$x + 1,5y \leq 3000$$

- No se pueden fabricar más de 2000 bolígrafos sencillos:

$$x \leq 2000$$

- Condiciones de no negatividad (no tiene sentido fabricar cantidades negativas):

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Función objetivo (ganancia total, que queremos *maximizar*):

$$B(x, y) = 0,5x + 0,7y$$

a) Región factible y vértices

La región factible es la intersección de los semiplanos definidos por las restricciones anteriores. Para hallar sus vértices estudiamos los puntos de corte entre las rectas frontera, comprobando cuáles cumplen todas las restricciones a la vez:

Intersección de rectas	Punto obtenido	É factible?
Ejes: $x = 0, y = 0$	$(0, 0)$	Sí
$y = 0$ con $x = 2000$	$(2000, 0)$	Sí
$x = 2000$ con $x + y = 2500$	$(2000, 500)$	Sí
$x + y = 2500$ con $x + 1,5y = 3000$	$(1500, 1000)$	Sí
$x = 0$ con $x + 1,5y = 3000$	$(0, 2000)$	Sí

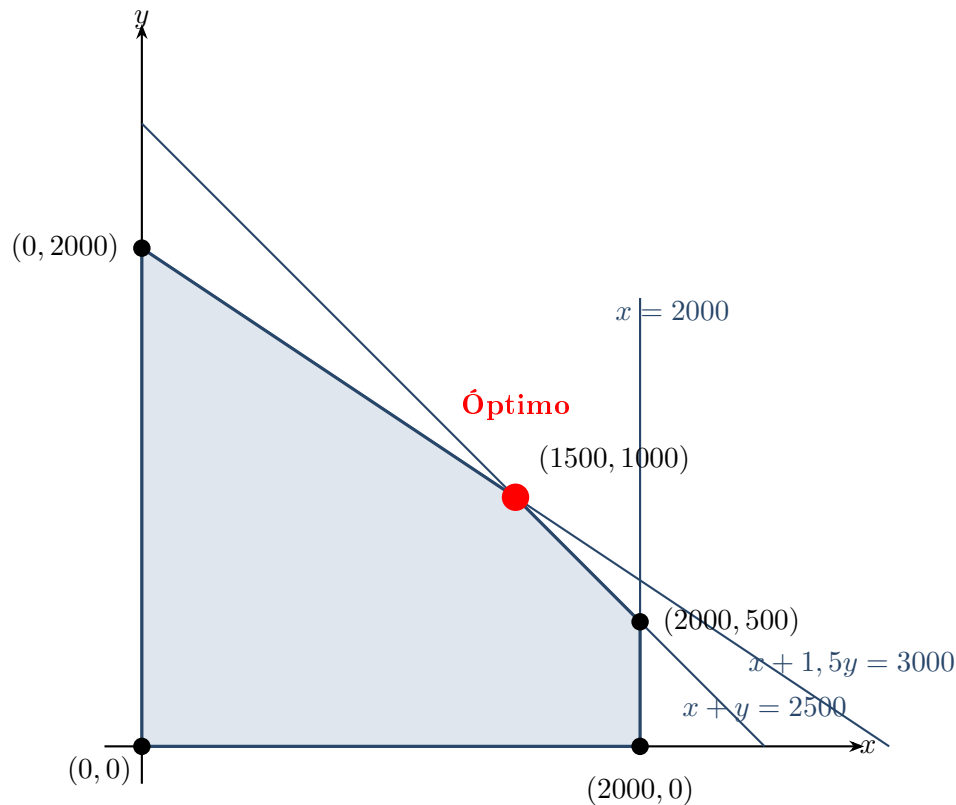
El vértice $(1500, 1000)$ se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x + 1,5y = 3000 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda: $0,5y = 500 \Rightarrow y = 1000$, y sustituyendo, $x = 2500 - 1000 = 1500$.

Así, la región factible es el pentágono de vértices

$$(0, 0), \quad (2000, 0), \quad (2000, 500), \quad (1500, 1000), \quad (0, 2000)$$



Como la función objetivo $B(x, y)$ es lineal, su máximo (si existe, y existe porque la región es acotada) se alcanza necesariamente en uno de los vértices de la región factible. Evaluamos B en cada uno de ellos:

Vértice (x, y)	$B(x, y) = 0,5x + 0,7y$
$(0, 0)$	0
$(2000, 0)$	1000
$(2000, 500)$	$1000 + 350 = 1350$
$(1500, 1000)$	$750 + 700 = 1450$
$(0, 2000)$	1400

El valor máximo se alcanza en el vértice $(1500, 1000)$.

Debe fabricar 1500 bolígrafos sencillos y 1000 bolígrafos sofisticados

b) Ganancia máxima

Sustituyendo el vértice óptimo en la función objetivo:

$$B(1500, 1000) = 0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000 = 750 + 700 = 1450$$

La ganancia máxima es de 1450 euros diarios

Problema 2 – Matrices (10 puntos)

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es invertible $AB - 2I$? (I identidad de orden 3)

Como A es de dimensión 3×2 y B es de dimensión 2×3 , el producto AB está bien definido y es una matriz 3×3 :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Restando $2I_3$ (dos veces la identidad de orden 3):

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante desarrollando, por ejemplo, por la segunda fila (que tiene dos ceros):

$$\begin{aligned} \det(AB - 2I) &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot [(-3)(2) - (4)(1)] = -3 \cdot (-6 - 4) = -3 \cdot (-10) = 30 \end{aligned}$$

Como $\det(AB - 2I) = 30 \neq 0$:

$AB - 2I$ es invertible

b) Matriz X tal que $A + 2XC = B^t$

Primero despejamos X algebraicamente:

$$A + 2XC = B^t \implies 2XC = B^t - A \implies X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1}$$

Comprobamos las dimensiones: B^t es 3×2 (traspuesta de la 2×3 matriz B), A es 3×2 , luego $B^t - A$ es 3×2 ; C^{-1} es 2×2 , por lo que el producto $(B^t - A)C^{-1}$ es 3×2 , dimensión compatible con X .

Trasponemos B :

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $B^t - A$:

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^{-1} . Como $\det(C) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$, C es invertible:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos $(B^t - A)C^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y finalmente dividimos entre 2:

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(Se puede comprobar sustituyendo que, en efecto, $A + 2XC = B^t$.)

c) Valores de z para los que $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple $CD = DC$

Calculamos ambos productos. Por un lado:

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & -3+z \\ 1-0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & z-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 1-0 \\ -3+z & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix}$$

Imponemos $CD = DC$, es decir, que coincidan término a término. Las posiciones $(1,1)$ y $(2,2)$ ya coinciden para cualquier z (ambas valen 2 y -1 respectivamente). Las posiciones $(1,2)$ y $(2,1)$ dan la misma condición:

$$z - 3 = 1 \implies z = 4$$

$$z = 4$$

Problema 3 – Estudio y representación de una función racional (10 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$.

a) Dominio y puntos de corte con los ejes

La función no está definida donde se anula el denominador:

$$3x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Corte con el eje Y (se obtiene con $x = 0$, que sí pertenece al dominio):

$$f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0 - 1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \implies (0, 1)$$

Corte con el eje X: necesitaríamos $f(x) = 0$, pero $\frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$ es un cociente con numerador constante 1, que nunca se anula.

La gráfica no corta al eje X

b) Asíntotas horizontales y verticales

Asíntotas verticales: se buscan en los puntos excluidos del dominio, $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. En ambos, el denominador $(3x^2 - 1)^2$ tiende a 0^+ (es un cuadrado) mientras el numerador vale 1, luego:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ son asíntotas verticales}$$

Asíntota horizontal: como el grado del denominador (4, al desarrollar el cuadrado) es mayor que el del numerador (0):

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$y = 0 \text{ es asíntota horizontal (por ambos lados)}$$

No existen asíntotas oblicuas, ya que al haber asíntota horizontal estas no pueden darse.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Derivamos usando la regla de la cadena, con $f(x) = (3x^2 - 1)^{-2}$:

$$f'(x) = -2(3x^2 - 1)^{-3} \cdot 6x = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

El signo de f' depende del signo de $-12x$ y del signo de $(3x^2 - 1)^3$ (que tiene el mismo signo que $3x^2 - 1$, al ser una potencia impar). El dominio queda dividido en tres intervalos por los puntos $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

Intervalo	signo de $-12x$	signo de $(3x^2 - 1)^3$	signo de f'
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	+	+	+
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	+	-	-
$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	-	-	+
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$	-	+	-

Creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, Decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

d) Máximos y mínimos locales

Los candidatos a extremo son los puntos donde $f'(x) = 0$ o no existe, dentro del dominio. Igualando el numerador a cero: $-12x = 0 \Rightarrow x = 0$ (los puntos $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ no pertenecen al dominio, así que no son candidatos válidos a extremo, aunque anulen el denominador de f').

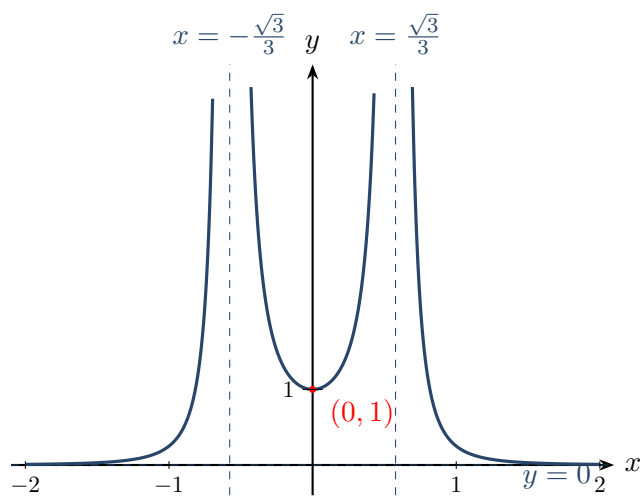
Según la tabla del apartado anterior, f pasa de decreciente a creciente en $x = 0$: se trata de un **mínimo local**. Su valor es $f(0) = 1$ (calculado en el apartado a).

Mínimo local en $(0, 1)$. No existen máximos locales

(En los extremos del dominio la función tiende a $+\infty$, pero al no ser esos puntos del dominio no se alcanza allí ningún máximo.)

e) Representación gráfica

Para dibujar la gráfica tenemos en cuenta: que f es una función **par** ($f(-x) = f(x)$, pues solo depende de x^2), luego es simétrica respecto al eje Y ; las dos asíntotas verticales en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0,577$; la asíntota horizontal $y = 0$; el mínimo local en $(0, 1)$; y los tramos de crecimiento/decrecimiento hallados.



Problema 4 – Optimización: ingresos y beneficios (10 puntos)

Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) Cantidad de abono que maximiza los ingresos

La función de ingresos es

$$I(x) = -x^2 + 60x + 100$$

que es una parábola con coeficiente principal negativo ($a = -1 < 0$), por lo que tiene un **máximo** en su vértice. Derivamos e igualamos a cero:

$$I'(x) = -2x + 60 = 0 \implies x = 30$$

Como $I''(x) = -2 < 0$, se confirma que $x = 30$ es un máximo. El ingreso máximo es:

$$I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = -900 + 1800 + 100 = 1000$$

Con 30 kg de abono se maximizan los ingresos, que ascienden a 1000 euros

b) Cantidad de abono que maximiza el beneficio

El beneficio es la diferencia entre ingresos y costes. Si el abono cuesta 12 euros por kilo, el coste de aplicar x kilos es $12x$ euros, luego:

$$Be(x) = I(x) - 12x = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$$

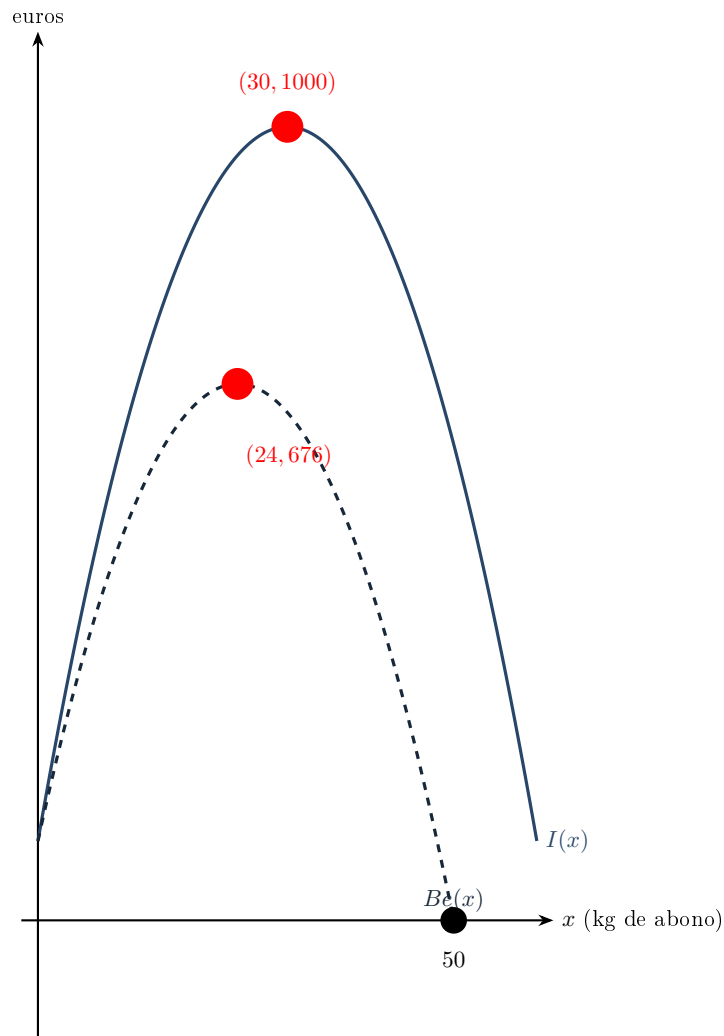
Derivamos e igualamos a cero:

$$Be'(x) = -2x + 48 = 0 \implies x = 24$$

Como $Be''(x) = -2 < 0$, $x = 24$ es un máximo. El beneficio máximo es:

$$Be(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = -576 + 1152 + 100 = 676$$

Con 24 kg de abono se maximiza el beneficio, que asciende a 676 euros



c) Cantidades de abono que garantizan beneficios positivos

Queremos resolver la inecuación $Be(x) > 0$:

$$-x^2 + 48x + 100 > 0 \iff x^2 - 48x - 100 < 0$$

Hallamos las raíces de $x^2 - 48x - 100 = 0$ con la fórmula general:

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \cdot 100}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{2304 + 400}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{2704}}{2} = \frac{48 \pm 52}{2}$$

Lo que da $x = 50$ y $x = -2$. Como la parábola $x^2 - 48x - 100$ tiene coeficiente principal positivo, es negativa *entre* sus raíces, es decir, para $-2 < x < 50$.

Como x representa kilos de abono, tiene sentido únicamente $x \geq 0$, así que:

El beneficio es positivo para $0 \leq x < 50$ kg de abono

Problema 5 – Probabilidad: sucesos y tabla de contingencia (10 puntos)

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. Ofrece tres extraescolares: fútbol, baloncesto (deportivas) y música (no deportiva); cada estudiante escoge exactamente una. Hay 400 estudiantes en total, 300 escogieron fútbol. Hay 310 estudiantes de ESO, de los cuales 230 escogieron fútbol y 60 baloncesto. Además, 8 estudiantes de Bachillerato escogieron música.

Construcción de la tabla de contingencia

A partir de los datos del enunciado deducimos los valores que faltan.

- Total de estudiantes de Bachillerato: $400 - 310 = 90$.
- En ESO: fútbol = 230, baloncesto = 60, luego música (ESO) = $310 - 230 - 60 = 20$.
- Música (Bachillerato) = 8 (dato del enunciado).
- Fútbol total = 300, y fútbol (ESO) = 230, luego fútbol (Bachillerato) = $300 - 230 = 70$.
- Baloncesto (Bachillerato) = $90 - 70 - 8 = 12$ (el resto de Bachillerato tras restar fútbol y música).

Con estos datos, la tabla de contingencia completa (frecuencias absolutas) es:

	Fútbol	Baloncesto	Música	Total
ESO	230	60	20	310
Bachillerato	70	12	8	90
Total	300	72	28	400

(Comprobación: todas las filas y columnas suman correctamente: $230 + 70 = 300$, $60 + 12 = 72$, $20 + 8 = 28$, y $310 + 90 = 400$.)

a) $P(\text{ESO} \cup \text{Música})$

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(\text{ESO} \cup \text{Música}) = P(\text{ESO}) + P(\text{Música}) - P(\text{ESO} \cap \text{Música})$$

De la tabla: $P(\text{ESO}) = \frac{310}{400} = \frac{31}{40}$, $P(\text{Música}) = \frac{28}{400} = \frac{7}{100}$, $P(\text{ESO} \cap \text{Música}) = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$ (estudiantes de ESO y música a la vez).

$$P(\text{ESO} \cup \text{Música}) = \frac{31}{40} + \frac{7}{100} - \frac{1}{20} = \frac{155}{200} + \frac{14}{200} - \frac{10}{200} = \frac{159}{200}$$

$$P(\text{ESO} \cup \text{Música}) = \frac{159}{200} = 0,795$$

b) Probabilidad de que esté en ESO sabiendo que escogió deportiva

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(ESO \mid Deportiva) = \frac{P(ESO \cap Deportiva)}{P(Deportiva)}$$

El suceso “deportiva” es fútbol o baloncesto. En total escogieron deportiva $300 + 72 = 372$ estudiantes, de los cuales son de ESO $230 + 60 = 290$.

$$P(ESO \mid Deportiva) = \frac{290/400}{372/400} = \frac{290}{372} = \frac{145}{186}$$

$$P(ESO \mid Deportiva) = \frac{145}{186} \approx 0,7796$$

c) ¿Independientes “estar en Bachillerato” y “no escoger baloncesto”?

Dos sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Sea A = “Bachillerato” y B = “no baloncesto”.

$$P(A) = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$

Como el total que escogió baloncesto es 72, el que *no* escogió baloncesto es $400 - 72 = 328$:

$$P(B) = \frac{328}{400} = \frac{41}{50}$$

Los estudiantes de Bachillerato que no escogieron baloncesto son $90 - 12 = 78$:

$$P(A \cap B) = \frac{78}{400} = \frac{39}{200}$$

Comparamos con el producto:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{9}{40} \cdot \frac{41}{50} = \frac{369}{2000} = 0,1845$$

$$P(A \cap B) = \frac{39}{200} = \frac{390}{2000} = 0,195$$

Como $P(A) \cdot P(B) = 0,1845 \neq 0,195 = P(A \cap B)$:

Los sucesos NO son independientes

Problema 6 – Probabilidad total y teorema de Bayes (10 puntos)

De 600 reses, 250 fueron vacunadas por el método A, 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Tuvieron problemas respiratorios el 30% de las vacunadas con A, el 20% de las vacunadas con B y el 60% de las no vacunadas.

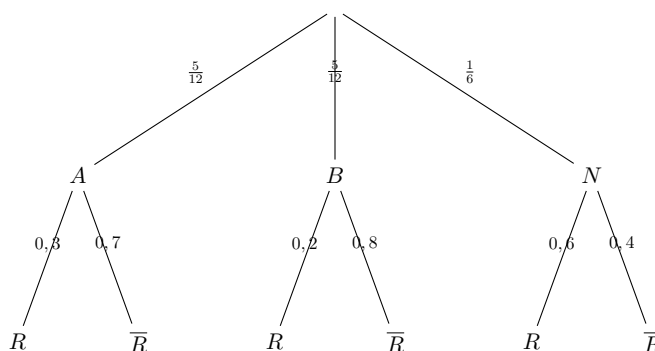
Planteamiento: sucesos y probabilidades

Definimos los sucesos: A = “vacunada con método A”, B = “vacunada con método B”, N = “no vacunada”, y R = “tiene problemas respiratorios”. Las reses no vacunadas son $600 - 250 - 250 = 100$. Las probabilidades a priori (forman un sistema completo de sucesos, pues toda res pertenece a exactamente uno de los tres grupos) son:

$$P(A) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}, \quad P(B) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}, \quad P(N) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

Y las probabilidades condicionadas que da el enunciado:

$$P(R | A) = 0,3, \quad P(R | B) = 0,2, \quad P(R | N) = 0,6$$



a) Probabilidad de que una res tenga problemas respiratorios

Aplicamos el **teorema de la probabilidad total**, ya que A , B y N forman un sistema completo de sucesos:

$$P(R) = P(A)P(R | A) + P(B)P(R | B) + P(N)P(R | N)$$

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{5}{12} \cdot 0,3 + \frac{5}{12} \cdot 0,2 + \frac{1}{6} \cdot 0,6 \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{15}{120} + \frac{10}{120} + \frac{12}{120} = \frac{37}{120} \end{aligned}$$

$$P(R) = \frac{37}{120} \approx 0,3083$$

b) Probabilidad de que, no habiendo tenido problemas respiratorios, haya sido vacunada con B

Es una probabilidad condicionada “al revés” respecto de los datos del enunciado, así que aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(B \mid \bar{R}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{R} \mid B)}{P(\bar{R})}$$

Primero, $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{37}{120} = \frac{83}{120}$.

El numerador: $P(B) \cdot P(\bar{R} \mid B) = \frac{5}{12} \cdot (1 - 0,2) = \frac{5}{12} \cdot 0,8 = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$.

$$P(B \mid \bar{R}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{83}{120}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{120}{83} = \frac{40}{83}$$

$$P(B \mid \bar{R}) = \frac{40}{83} \approx 0,4819$$

c) Probabilidad de la intersección de “no vacunada” y “problemas respiratorios”

Usamos la definición de probabilidad condicionada, $P(R \mid N) = \frac{P(N \cap R)}{P(N)}$, despejando:

$$P(N \cap R) = P(N) \cdot P(R \mid N) = \frac{1}{6} \cdot 0,6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(N \cap R) = \frac{1}{10} = 0,1$$